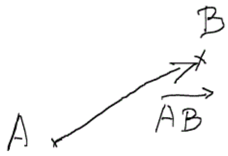
VECTORS

Un vector del pla és un parell ordenat $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

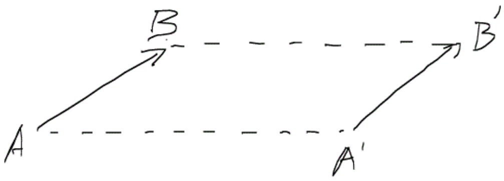
Siguin $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$ dos punts del pla. Es defineix el vector que té origen al punt A i final al punt B com a $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A}$$



Proposició

Si els punts A' i B' s'obtenen traslladant els punts A i B aleshores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

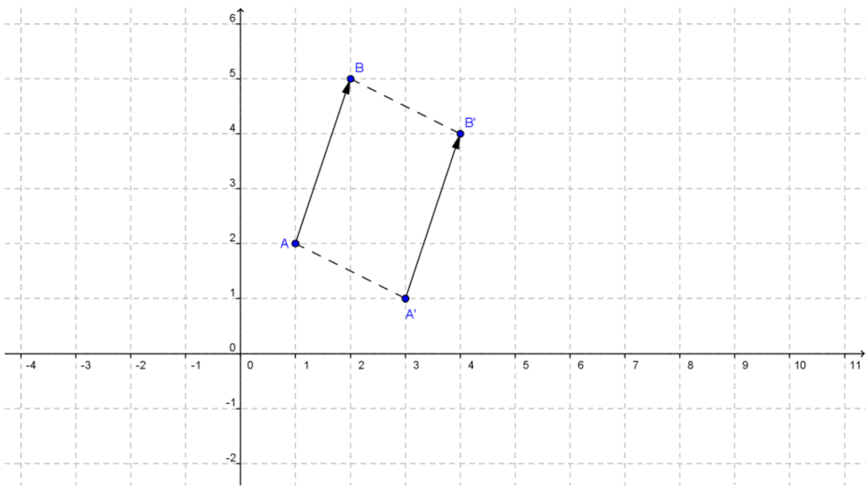


Demostració

$A = (a_1, a_2) \quad B = (b_1, b_2)$

$A' = (a_1 + n, a_2 + m) \quad B' = (b_1 + n, b_2 + m)$

$\overrightarrow{A'B'} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \overrightarrow{AB}$



$A = (1, 2)$

$B = (2, 5)$

$\overrightarrow{AB} = (2-1, 5-2)$

$\overrightarrow{AB} = (1, 3)$

$A' = (3, 1)$

$B' = (4, 4)$

$\overrightarrow{A'B'} = (4-3, 4-1)$

$\overrightarrow{A'B'} = (1, 3)$

Suma de vectors

Siguin $\vec{v}=(v_1, v_2)$ i $\vec{u}=(u_1, u_2)$.

Es defineix $\vec{v}+\vec{u}=(v_1+u_1, v_2+u_2)$

Exemple

$\vec{v}=(-1, 4)$

$\vec{u}=(4, -7)$

$\vec{v}+\vec{u}=(-1+4, 4-7)=(3, -3)$

Propietats

1) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ Associativa

2) $\vec{0}=(0,0)$ $\quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ Element Neutre

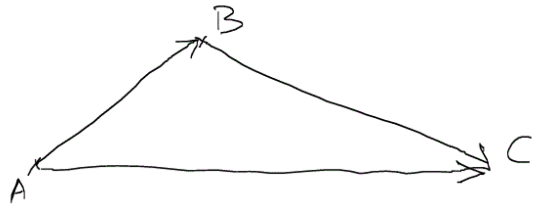
3) $\vec{u}=(u_1, u_2)$ $\quad -\vec{u}=(-u_1, -u_2)$ Element oposat respecte la suma

$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

4) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ Commutativa

Proposició

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$



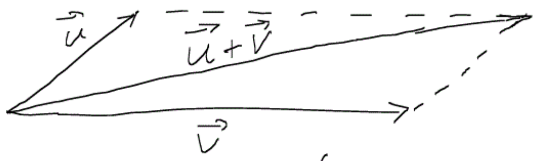
Demostració

Siguin $A=(a_1, a_2)$ $\quad B=(b_1, b_2)$ $\quad C=(c_1, c_2)$

$\vec{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$ $\quad \vec{BC}=(c_1-b_1, c_2-b_2)$

$\vec{AB}+\vec{BC}=(b_1-a_1+c_1-b_1, b_2-a_2+c_2-b_2)=(c_1-a_1, c_2-a_2)=\vec{AC}$

Regle del paral·lelogram



La suma dels vectors $\vec{u}+\vec{v}$ s'obté dibuixant la diagonal del paral·lelogram

Producte d'un vector per un escalar

Siguin $k \in \mathbb{R}$ i $\vec{u}=(u_1, u_2)$.

Es defineix $k.\vec{u}=(k.u_1, k.u_2)$

Exemple

Sigui $\vec{u}=(-4,3)$

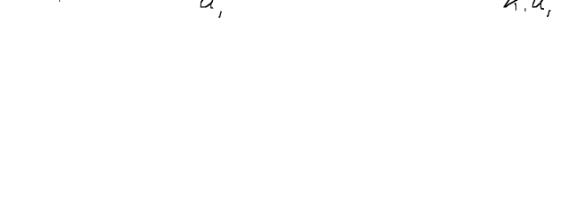
$2.\vec{u}=(2.(-4), 2.3)=(-8,6)$

$-3.\vec{u}=((-3).(-4), (-3).3)=(12,-9)$

Propietats

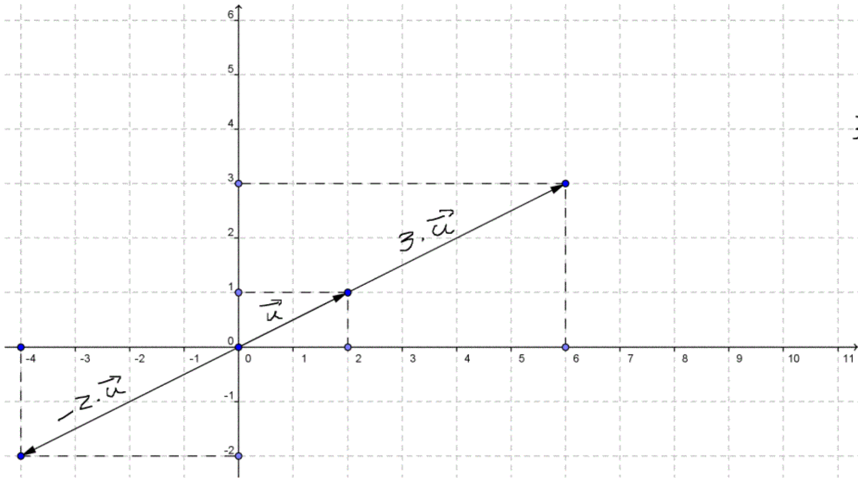
1) $k.(n.\vec{u})=(k.n).\vec{u}$
2) $(k+n).\vec{u}=k.\vec{u}+n.\vec{u}$
3) $k.(\vec{u}+\vec{v})=k.\vec{u}+k.\vec{v}$
4) $1.\vec{u}=\vec{u}$

Si considero un vector $\vec{u}=(u_1, u_2)$ amb origen al punt $(0,0)$ aleshores les components del vector coincideixen amb les coordenades del punt final



Si multiplico el vector $\vec{u}$ per un escalar $k>0$ s'obté un vector que té la mateixa direcció i sentit que $\vec{u}$.

Si multipliquem per un escalar $k<0$ el sentit és el contrari



$\vec{u}=(2,1)$

$3\vec{u}=(3.2, 3.1)$

$3\vec{u}=(6,3)$

$-2.\vec{u}=(-2.2,-2\cdot 1)$

$-2.\vec{u}=(-4,-2)$

$3\vec{u}$ té el mateix sentit que $\vec{u}$

$-2\vec{u}$ té sentit contrari

Dependència lineal

Definició

Una combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és una expressió del tipus: $\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}$ on $\lambda_1\in\mathbb{R}$ $\lambda_2\in\mathbb{R}$

Exemple

1) Siguin $\vec{u}=(-1,2)$ i $\vec{v}=(3,4)$

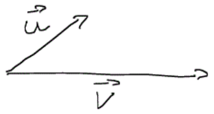
$-2\vec{u}+3\vec{v}$ és una combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$-2\vec{u}+3\vec{v}=-2.(-1,2)+3.(3,4)=(2,-4)+(9,12)=(11,8)$

Direm que el vector $\vec{w}$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$. $\boxed{\vec{w}=-2\vec{u}+3\vec{v}}$

Definició

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents si no tenen la mateixa direcció



Proposició

Dos vectors $\vec{u}=(u_1,u_2)$ i $\vec{v}=(v_1,v_2)$ són linealment independents si les seves components no són proporcionals, és a dir, $\boxed{\frac{u_1}{v_1}\neq\frac{u_2}{v_2}}$

Exemples

1) $\vec{u} = (-1, 2)$ i $\vec{v} = (2, 3)$ són linealment independents

$$\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{3}$$

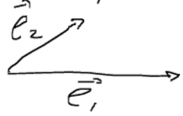
2) $\vec{u} = (-1, 1)$ i $\vec{v} = (3, -3)$ són linealment dependents

$$\frac{3}{-1} = \frac{-3}{1} = -3 \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = -3\vec{u}}$$

$\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció

Bases del pla

Dos vectors $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ formen una base del pla si són linealment independents



Teorema

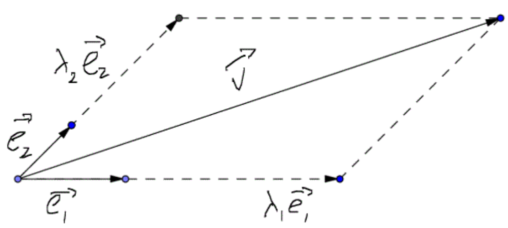
Qualsevol vector $\vec{v}$ s'expressa de forma única com a combinació lineal d'una base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$

$$\boxed{\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2}$$

Els nombres λ_1, λ_2 s'anomenen components de $\vec{v}$ respecte la base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$

Demostració

Projectem $\vec{v}$ sobre les direccions $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ de manera que construïm un paral·lelogram amb diagonal $\vec{v}$



La figura mostra que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$ on λ_1 i λ_2 estan determinats.

Exemple

Trobeu les components del vector $\vec{v}=(9,3)$ respecte la base $\vec{e}_1=(2,0)$, $\vec{e}_2=(1,1)$. Feu, després, la representació gràfica.

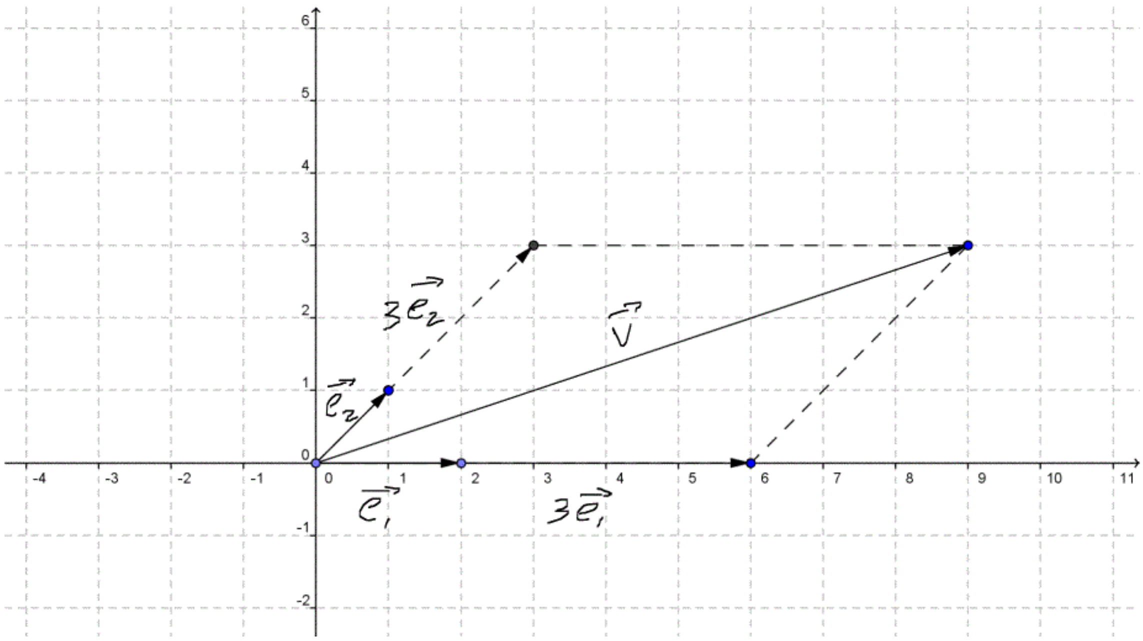
$$\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$$
$$(9,3)=\lambda_1(2,0)+\lambda_2(1,1)$$
$$(9,3)=(2\lambda_1,0)+(\lambda_2,\lambda_2)$$
$$(9,3)=(2\lambda_1+\lambda_2,\lambda_2)$$

Sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2=9 \\ \lambda_2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1=3 \\ \lambda_2=3 \end{cases}$$

$$2\lambda_1+3=9$$
$$2\lambda_1=9-3$$
$$2\lambda_1=6$$
$$\lambda_1=\frac{6}{2}=3$$

$$\boxed{\vec{v}_1=3\vec{e}_1+3\vec{e}_2}$$



Nota

La base $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$ s'anomena base canònica.
Les components d'un vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$ coincideixen amb les components respecte a la base canònica.
En efecte,

$$\vec{v}=(v_1,v_2)=(v_1,0)+(0,v_2)=v_1\cdot(1,0)+v_2\cdot(0,1)$$

$$\boxed{\vec{v}=v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}}$$

Producte escalar

Siguin $\vec{u}=(u_1,u_2)$ i $\vec{v}=(v_1,v_2)$ dos vectors

Es defineix $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$

Exemple

$\vec{u}=(-1,2)$ i $\vec{v}=(3,1)$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)\cdot 3+2\cdot 1=-1$

Propietats

1) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ Distributiva
2) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ Simètrica
3) $(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$ $\quad k\in\mathbb{R}$
4) Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ aleshores $\vec{u}\cdot\vec{u}>0$

Nota

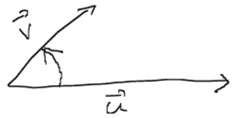
$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$

En efecte

Sigui $\vec{u}=(u_1,u_2)$

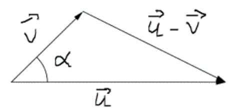
$\vec{u}\cdot\vec{u}=u_1\cdot u_1+u_2\cdot u_2=u_1^2+u_2^2=\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2}\right)^2=|\vec{u}|^2$

Teorema



$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\widehat{\vec{u},\vec{v}}}$$

Demostració



Apliquem el teorema del cosinus

$|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\alpha$

Per tant,

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

Desenvolupem

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

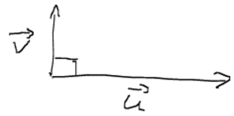
Igualem les dues identitats

$\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

Simplificant termes $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\alpha$

Definició

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals si formen un angle de 90°



Proposició

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

En efecte

$$0=\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\widehat{\vec{u},\vec{v}} \Longleftrightarrow \cos\widehat{\vec{u},\vec{v}}=0 \Longleftrightarrow \widehat{\vec{u},\vec{v}}=90^\circ$$

Exemple

$\vec{u}=(2,1)$ i $\vec{v}=(-1,2)$ són ortogonals

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-1)+1\cdot2=-2+2=0$

Nota

$$\cos\widehat{\vec{u},\vec{v}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

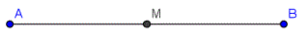
Exemple

Calculeu l'angle que formen els vectors $\vec{u}=(1,1)$ i $\vec{v}=(1,0)$

$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad |\vec{v}|=\sqrt{1^2+0^2}=1$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot1+1\cdot0=1$

$$\cos\widehat{\vec{u},\vec{v}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot1}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \widehat{\vec{u},\vec{v}}=45^\circ$$

Punt mig d'un segment



Siguin $A=(a_1,a_2)$ i $B=(b_1,b_2)$

$M=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$ Coordenades del punt mig

En efecte

$M= A+\frac{1}{2}\vec{AB}=(a_1,a_2)+\frac{1}{2}(b_1-a_1,b_2-a_2)=\left(a_1+\frac{b_1}{2}-\frac{a_1}{2},a_2+\frac{b_2}{2}-\frac{a_2}{2}\right)$

$M=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Punts alineats

Els punt A, B i C estan alineats si els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ són linealment dependents

Exemple

$A=(1,-1)$, $B=(2,1)$ i $C=(3,3)$ estan alineats

$\vec{AB}=(2-1,1-(-1))=(1,2)$ $\quad\vec{AC}=(3-1,3-(-1))=(2,4)$

$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}\Rightarrow \vec{AB}$ i $\vec{AC}$ són linealment dependents

Divisió d'un segment en parts iguals

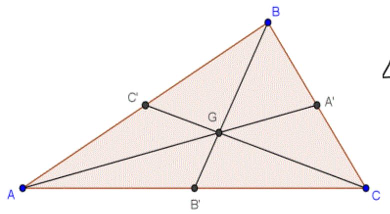
Siguin $A=(2,1)$ i $B=(4,-2)$
Trobeu els punts P i Q que divideixen el segment $\overline{AB}$ en tres parts iguals

$$\vec{AB} = B - A = (4-2, -2-1) = (2,-3)$$

$$P = A + \frac{1}{3}\vec{AB} = (2,1) + \frac{1}{3}(2,-3) = (2,1) + \left(\frac{2}{3}, -1\right) = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

$$Q = A + \frac{2}{3}\vec{AB} = (2,1) + \frac{2}{3}(2,-3) = (2,1) + \left(\frac{4}{3}, -2\right) = \left(\frac{10}{3}, -1\right)$$

Baricentre



Siguin $A=(a_1,a_2)$ $B=(b_1,b_2)$ i $C=(c_1,c_2)$
El baricentre o centre de masses és el punt G on es tallen les tres medianes (rectes que uneixen un vèrtex i el punt mig del costat oposat)

Es verifica $GB = 2GB'$ i $G = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

En efecte

$$G = B + \frac{2}{3}\vec{BB'} = (b_1, b_2) + \frac{2}{3}\left(\frac{a_1+c_1}{2} - b_1, \frac{a_2+c_2}{2} - b_2\right) = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$