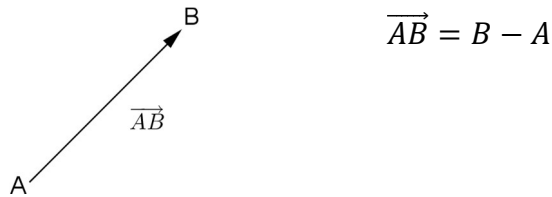


Unidad 7. VECTORES

Vectores en el plano

Un vector del plano es un par ordenado $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Sean $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ dos puntos del plano. Se define el vector que tiene origen en el punto A y final en el punto B como $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$



Proposición

Si los puntos A' y B' se obtienen trasladando los puntos A y B entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

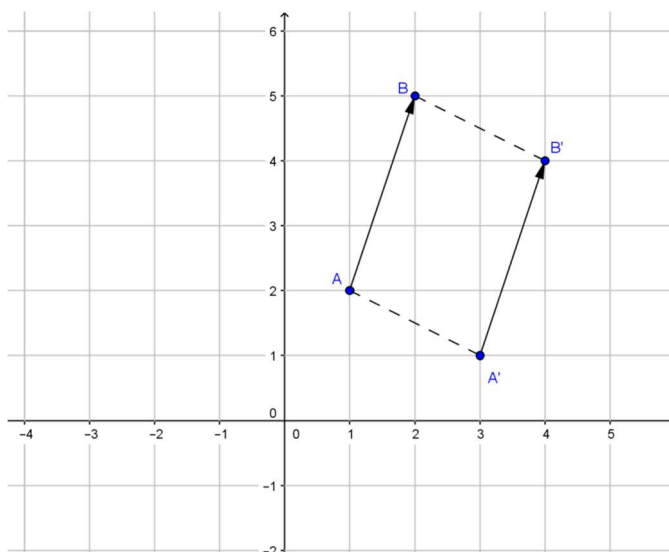


Demostración

$$A = (a_1, b_1) \quad B = (b_1, b_2)$$

$$A' = (a_1 + m, a_2 + n) \quad B' = (b_1 + m, b_2 + n)$$

$$\overrightarrow{A'B'} = (b_1 + m - (a_1 + m), b_2 + n - (a_2 + n)) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \overrightarrow{AB}$$



$$A = (1, 2) \quad B = (2, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 5 - 2) = (1, 3)$$

$$A' = (3, 1) \quad B' = (4, 4)$$

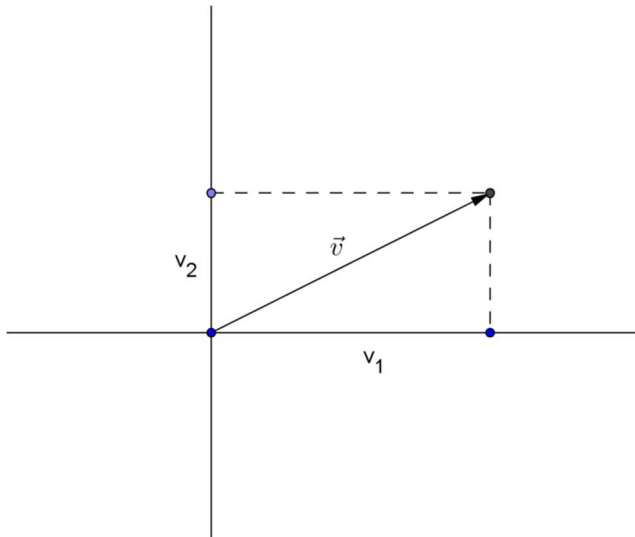
$$\overrightarrow{A'B'} = (4 - 3, 4 - 1) = (1, 3)$$

Módulo de un vector

El módulo de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es su longitud $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Demostración

El vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ tiene origen en el punto $O = (0,0)$ y final en el punto $P = (v_1, v_2)$ porque $\overrightarrow{OP} = (v_1 - 0, v_2 - 0) = (v_1, v_2) = \vec{v}$



Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos:

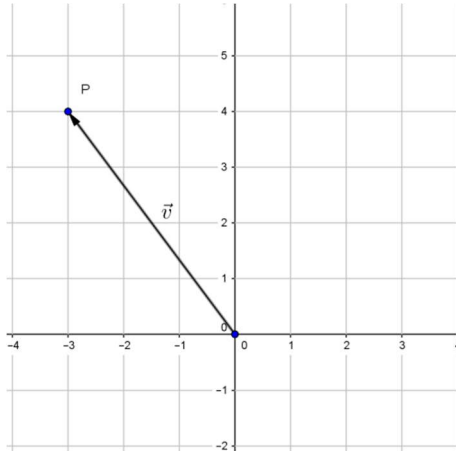
$$|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Por lo tanto,

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Ejemplo

Representar el vector $\vec{v} = (-3,4)$ y calcular su módulo.



$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Los elementos de un vector son:

El **módulo**: es la longitud del vector

La **dirección**: es la de la recta que contiene el vector

El **sentido**: es el que indica la flecha

Los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario.



Suma de vectores

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$
Se define $\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$

Ejemplo

$$\vec{v} = (-1, 4)$$

$$\vec{u} = (4, -7)$$

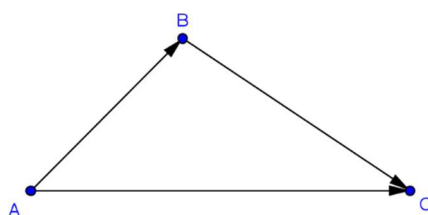
$$\vec{v} + \vec{u} = (-1 + 4, 4 - 7) = (3, -3)$$

Propiedades

- 1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ Asociativa
- 2) $\vec{0} = (0, 0)$ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ Elemento Neutro
- 3) $\vec{u} = (u_1, u_2)$ $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$ Elemento opuesto respecto la suma
 $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
- 4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ Conmutativa

Proposición

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



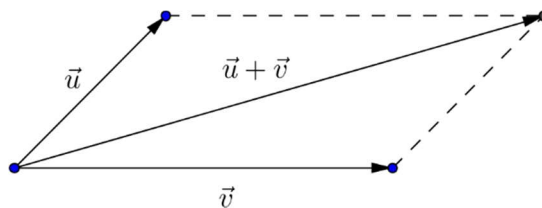
Demostración

Sean $A = (a_1, a_2)$ $B = (b_1, b_2)$ $C = (c_1, c_2)$

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \quad \overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (b_1 - a_1 + c_1 - b_1, b_2 - a_2 + c_2 - b_2) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2) = \overrightarrow{AC}$$

Regla del paralelogramo



La suma de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ se obtiene dibujando la diagonal del paralelogramo

Producto de un número por un vector

Sea $k \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$

Se define $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$

Ejemplo

Sea $\vec{u} = (-4, 3)$

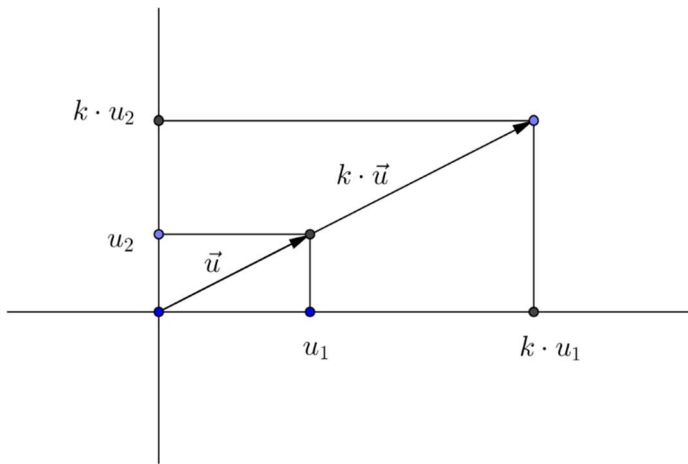
$$2 \cdot \vec{u} = (2 \cdot (-4), 2 \cdot 3) = (-8, 6)$$

$$-3 \cdot \vec{u} = (-3 \cdot (-4), -3 \cdot 3) = (12, -9)$$

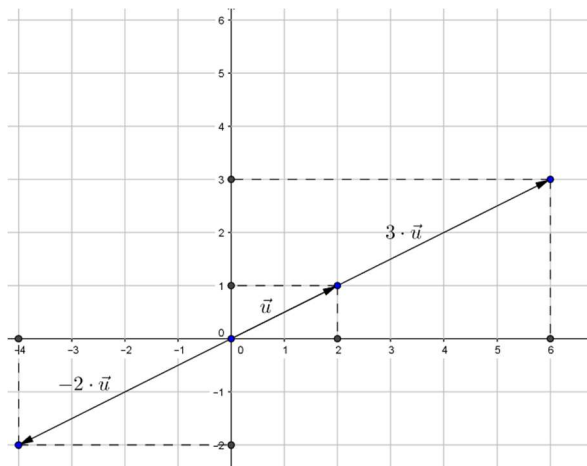
Propiedades

- 1) $k \cdot (n \cdot \vec{u}) = (k \cdot n) \cdot \vec{u}$ Asociativa
- 2) $(k + n) \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{u}$ Distributiva respecto a la suma de números reales
- 3) $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$ Distributiva respecto a la suma de vectores
- 4) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Si considero un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ con origen en el punto $(0, 0)$, entonces las componentes del vector coinciden con las coordenadas del punto final.



Si multiplicamos el vector \vec{u} por un número $k > 0$ se obtiene un vector que tiene la misma dirección y el mismo sentido que \vec{u} . Si multiplicamos por un número $k < 0$ el sentido es el contrario.



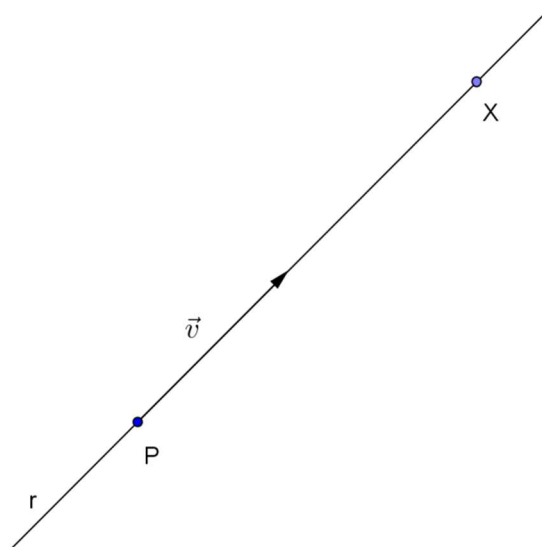
$$\vec{u} = (2, 1)$$

$$3 \cdot \vec{u} = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1) = (6, 3)$$

$$-2 \cdot \vec{u} = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 1) = (-4, -2)$$

El vector $3 \cdot \vec{u}$ tiene el mismo sentido que \vec{u} y el módulo es el triple. El vector $-2 \cdot \vec{u}$ tiene sentido contrario que \vec{u} y el módulo es el doble.

Ecuaciones de la recta



$P = (p_1, p_2)$ es un punto de la recta r

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ es un vector director de la recta r

$X = (x, y)$ es un punto arbitrario de la recta r

Los vectores \overrightarrow{PX} y \vec{v} tienen la misma dirección. Por lo tanto, $\overrightarrow{PX} = k \cdot \vec{v}$

$$X - P = k \cdot \vec{v}$$

$$X = P + k \cdot \vec{v}$$

$$(x, y) = (p_1, p_2) + k \cdot (v_1, v_2) \quad \text{Ecuación vectorial de la recta } r$$

Igualemos $(x, y) = (p_1 + k \cdot v_1, p_2 + k \cdot v_2)$

$$\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \quad \text{Ecuaciones paramétricas de la recta } r$$

Despejamos k y obtenemos $\begin{cases} \frac{x-p_1}{v_1} = k \\ \frac{y-p_2}{v_2} = k \end{cases}$

Igualemos $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}$ **Ecuación continua** de la recta r

$$v_2(x - p_1) = v_1(y - p_2)$$

$$v_2x - v_1y + v_1p_2 - v_2p_1 = 0$$

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{Ecuación general de la recta } r$$

El **vector director** de la recta r es $\vec{v} = (-B, A)$

Despejamos la variable y , obtenemos $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

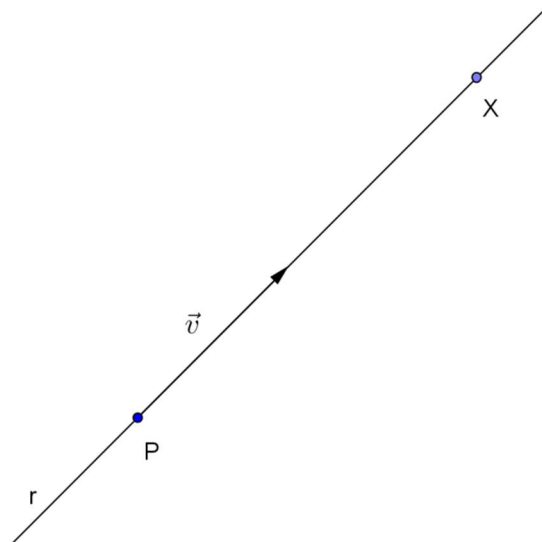
$$y = mx + b \quad \text{Ecuación explícita de la recta } r$$

m : **pendiente** de la recta r

b : **ordenada en el origen** de la recta r

Ejemplo

Encuentra las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P = (2, -1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (-1, 3)$



$P = (2, -1)$ es un punto de la recta r

$\vec{v} = (-1, 3)$ es un vector director de la recta r

$X = (x, y)$ es un punto arbitrario de la recta r

$$X = P + k \cdot \vec{v}$$

$$(x, y) = (2, -1) + k \cdot (-1, 3) \text{ Ecuación vectorial de la recta } r$$

Igualamos $(x, y) = (2 - k, -1 + 3k)$

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -1 + 3k \end{cases} \text{ Ecuaciones paramétricas de la recta } r$$

Despejamos k y obtenemos $\begin{cases} \frac{x-2}{-1} = k \\ \frac{y+1}{3} = k \end{cases}$

Igualamos $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3}$ Ecuación continua de la recta r

$$3(x - 2) = -1(y + 1)$$

$$3x - 6 = -y - 1$$

$$3x + y - 5 = 0 \text{ Ecuación general de la recta } r$$

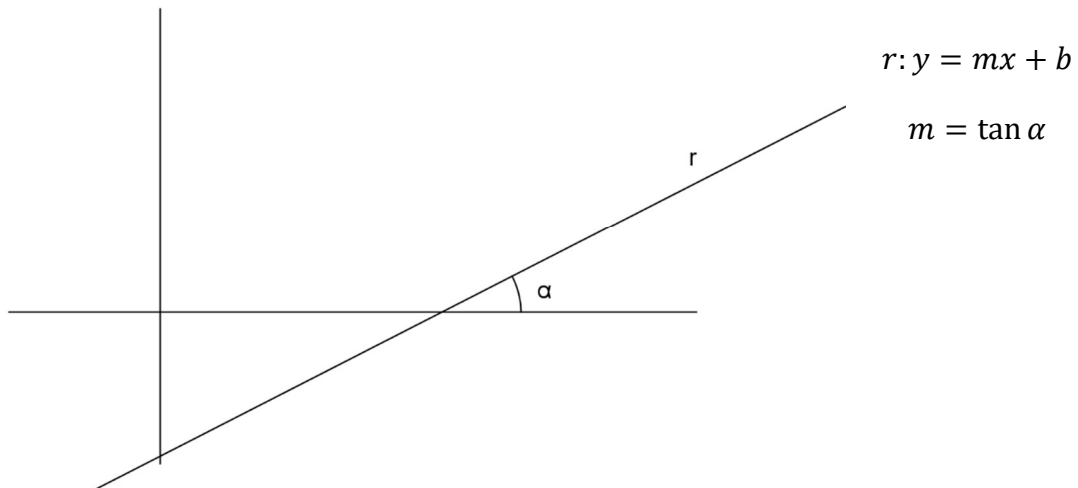
Despejamos la variable y , obtenemos $y = -3x + 5$ Ecuación explícita de la recta r

$$m = -3 \text{ pendiente de la recta } r$$

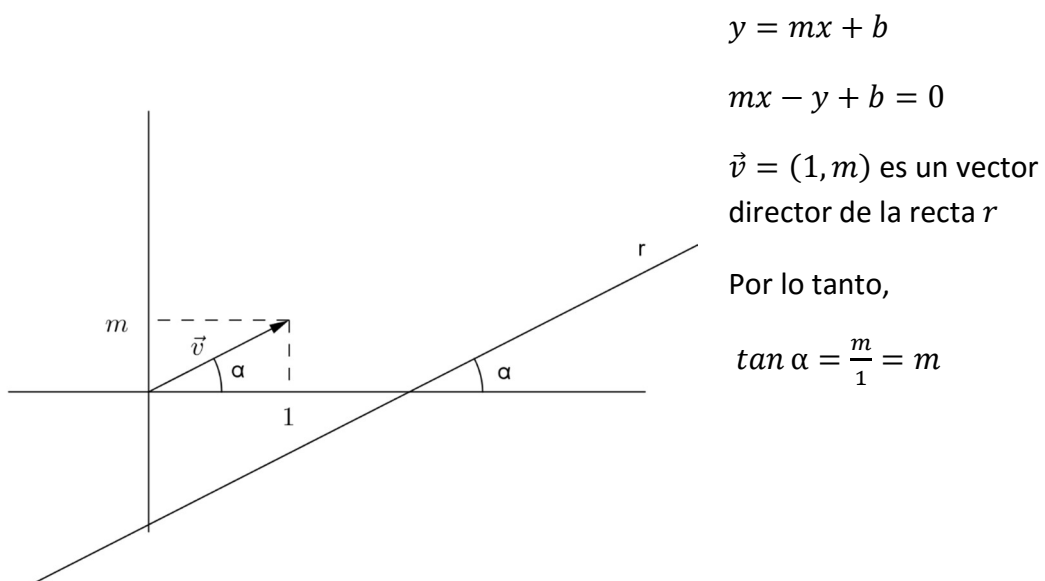
$$b = 5 \text{ ordenada en el origen de la recta } r$$

La pendiente y el ángulo de inclinación

La pendiente de la recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas.



Demostración



Ejemplo

Encuentra el ángulo que forma la recta $r: 2x + 4y - 3 = 0$ con el eje de abscisas

$$2x + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow 4y = -2x + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{4}x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

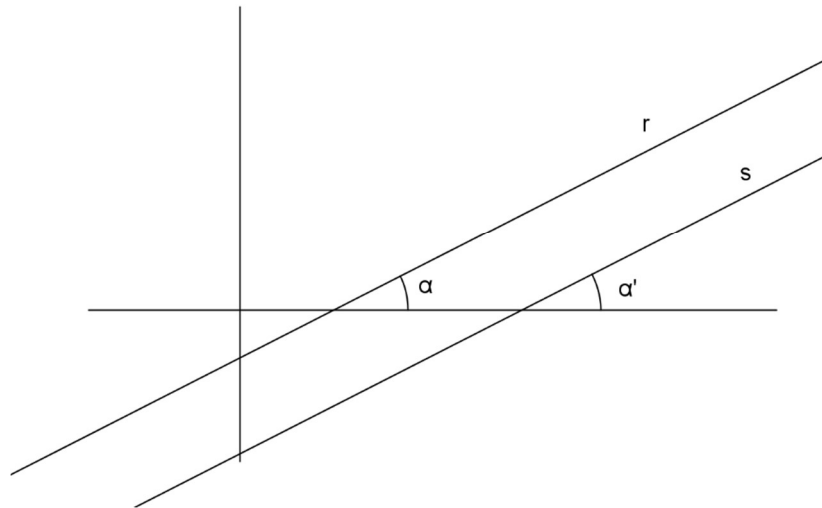
$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 153,43^\circ$$

Incidencia y paralelismo

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente

Demostración

$$r: y = mx + b \quad s: y = m'x + b'$$



$$r \text{ y } s \text{ son paralelas} \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \Leftrightarrow \tan \alpha = \tan \alpha' \Leftrightarrow m = m'$$

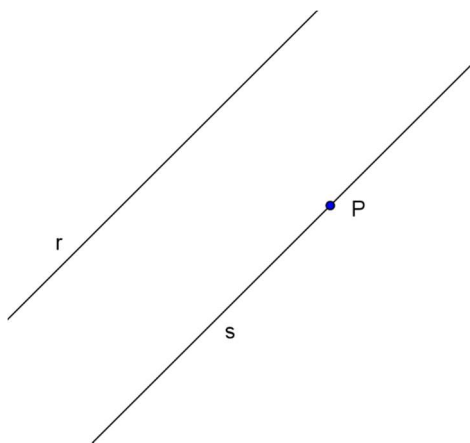
Ejemplos

1) Estudiar la posición relativa de las rectas $r: 2x - 3y + 1 = 0$ y $s: 4x - 6y - 3 = 0$

$$r: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad s: y = \frac{4}{6}x - \frac{3}{6} \Leftrightarrow s: y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$$

Como las dos rectas tienen la misma pendiente son paralelas

2) Hallar la recta paralela a $r: 3x + 2y - 1 = 0$ que pasa por el punto $P = (-2, 2)$



$$s? \quad s \parallel r \quad \text{y} \quad P \in s$$

La ecuación explícita de la recta r es

$$r: y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Como la recta s es paralela a r tiene ecuación

explícita: $s: y = -\frac{3}{2}x + b$

$$P \in s \Rightarrow 2 = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + b \Rightarrow -1 = b$$

Por lo tanto, $s: y = -\frac{3}{2}x - 1$