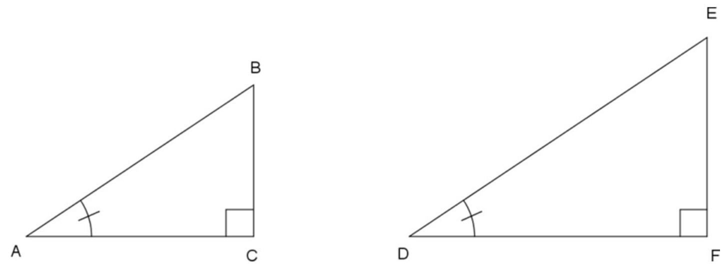
UNIDAD 5. TRIGONOMETRIA

Triángulos rectángulos semejantes

Dos triángulos rectángulos son **semejantes** si tienen un ángulo igual



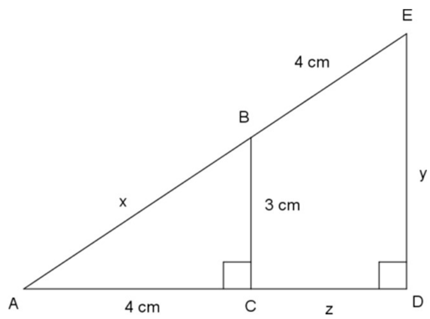
Los triángulos rectángulos de la figura son **semejantes** porque los ángulos $\hat{A}$ y $\widehat{D}$ son iguales.

Cuando dos triángulos rectángulos son **semejantes** los lados que unen los mismos ángulos son proporcionales.

$$\frac{AC}{DF}=\frac{CB}{FE}=\frac{AB}{DE}$$

Ejemplo

Encuentra las longitudes x, y, z de la figura.



Aplicamos el teorema de Pitágoras: $x^2 = 4^2 + 3^2$

$$x^2 = 16 + 9$$

$$x^2 = 25$$

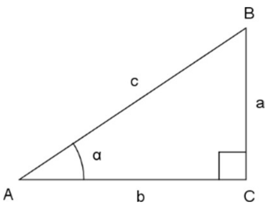
$$x = \sqrt{25} = 5\ cm$$

Los triángulos rectángulos ABC y AED son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{A}$ común. Por lo tanto, los lados son proporcionales:

$$\frac{y}{3}=\frac{5+4}{5}\Rightarrow\frac{y}{3}=\frac{9}{5}\Rightarrow y=\frac{9\cdot 3}{5}=\frac{27}{5}=5{,}4\ cm$$

$$\frac{z+4}{4}=\frac{5+4}{5}\Rightarrow\frac{z+4}{4}=\frac{9}{5}\Rightarrow z+4=\frac{4\cdot 9}{5}=\frac{36}{5}\Rightarrow z=\frac{36}{5}-4=\frac{16}{5}=3{,}2\ cm$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

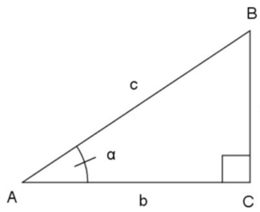


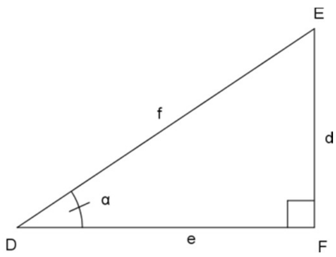
$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$ Seno del ángulo α

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenus}$$ Coseno del ángulo α

$$tan\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}$$ Tangente del ángulo α

Las razones trigonometricas no dependen del triángulo rectángulo elegido porque si tomamos un triángulo más grande este será semejante al primero:





Como los lados son proporcionales, se cumple:

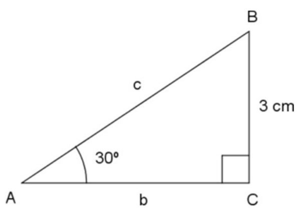
$$\frac{c}{f} = \frac{a}{d} \Rightarrow \frac{d}{f} = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} \Rightarrow \frac{e}{f} = \frac{b}{c} = cos\ \alpha$$

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} \Rightarrow \frac{d}{e} = \frac{a}{b} = tan\ \alpha$$

Ejemplo

Resolver el triángulo:



La suma de los ángulos de un triángulo es 180^o.

$$\hat{B} + 90^o + 30^o = 180^o$$
$$\hat{B} = 180^o - 90^o - 30^o = 60^o$$

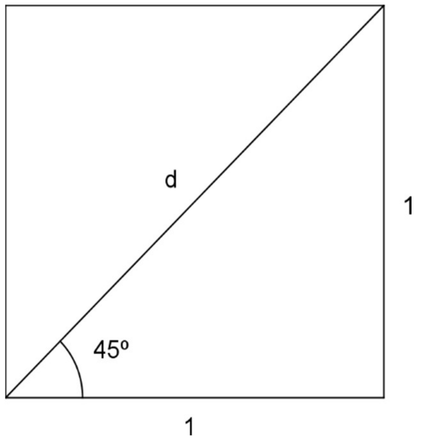
$$sen\ 30^o = 0{,}5$$
$$0{,}5 = \frac{3}{c}$$
$$c = \frac{3}{0{,}5} = 6\ cm$$

Teorema de Pitágoras:

$$6^2 = 3^2 + b^2$$
$$36 = 9 + b^2$$
$$36 - 9 = b^2$$
$$27 = b^2$$
$$b = \sqrt{27} = 5{,}2\ cm$$

Razones trigonométricas de $30^o, 45^o y\ 60^o$

Considero un cuadrado de lado 1



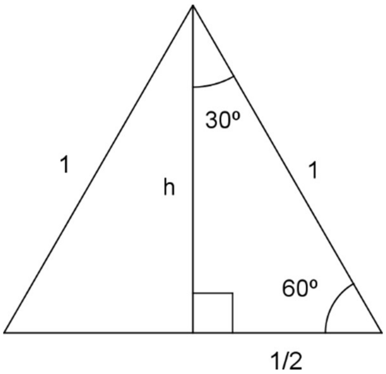
Por el Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$sen\ 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$cos\ 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$tan\ 45^o = \frac{1}{1} = 1$$

Considero un triángulo equilátero de lado 1



Por el Teorema de Pitágoras:

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$1 = h^2 + \frac{1}{4}$$
$$1 - \frac{1}{4} = h^2$$
$$\frac{3}{4} = h^2$$
$$h = \sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto:

$$sen\ 60^0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$cos\ 60^0 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$
$$tan\ 60^0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$
$$sen\ 30^0 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$
$$cos\ 30^0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tan\ 30^0 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

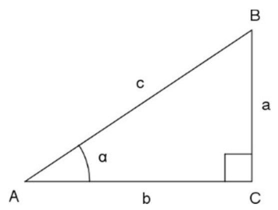
α	30^o	45^o	60^o
$sen\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Relación entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo agudo

I. $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

II. $\tan\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$

Demostración



Por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$
$$(sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$
$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Por otra parte $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$

Ejemplos

1) Si $sen\,\alpha = 0{,}6$ calcula $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$0{,}6^2 + cos^2\alpha = 1$$
$$0{,}36 + cos^2\alpha = 1$$
$$cos^2\alpha = 1 - 0{,}36$$
$$cos^2\alpha = 0{,}64$$
$$\cos\alpha = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$$

$$\tan\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

2) Sabiendo que $\tan\alpha = 2$ calcula $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$

$$\begin{cases} sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = 2 \end{cases}$$

$$sen\,\alpha = 2cos\alpha$$

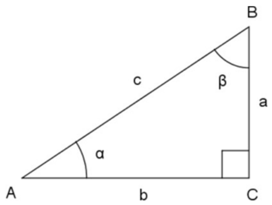
Substituyendo en la primera ecuación:

$$(2\cos\alpha)^2 + cos^2\alpha = 1$$
$$4cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$5cos^2\alpha = 1$$
$$cos^2\alpha = \frac{1}{5}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$sen\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Razones trigonométricas del ángulo complementario

$$sen(90^o - \alpha) = \cos\alpha$$
$$cos(90^o - \alpha) = se\quad \alpha$$
$$tan(90^o - \alpha) = \frac{1}{tan\alpha}$$

Demostración



$$\alpha + \beta + 90^o = 180^o$$
$$\beta = 180^o - 90^o - \alpha$$
$$\beta = 90^o - \alpha$$
$$sen\,\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = sen\,\alpha$$
$$\tan\beta = \frac{sen\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{1}{tan\,\alpha}$$

Ejemplo

Expresar las razones trigonométricas de 80^o en función de las de 10^o .

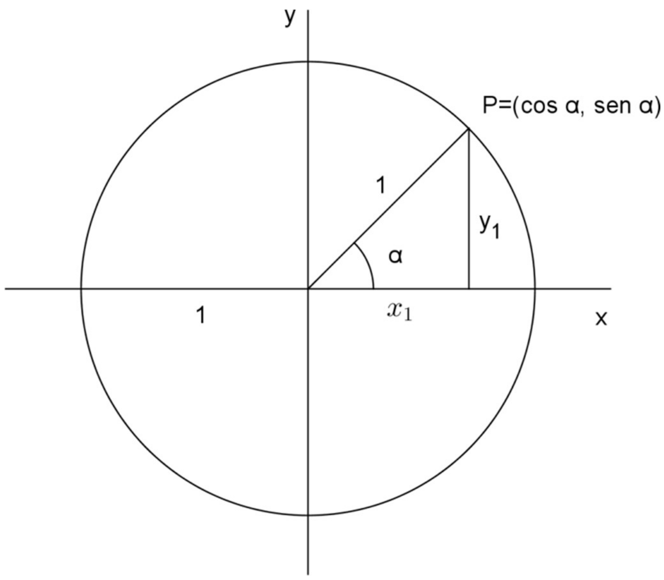
$$80^o = 90^o - 10^o$$

Por lo tanto,

$$sen\,80^o = \cos 10^o$$
$$cos\,80^o = sen\,10^o$$
$$tan\,80^o = \frac{1}{tan10^o}$$

Razones trigonométricas de un ángulo arbitrario

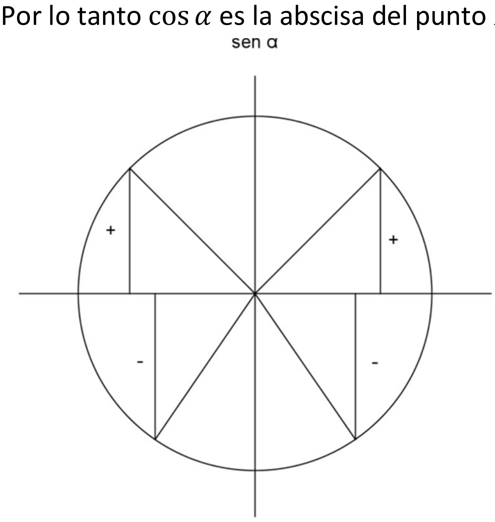
Considero la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1 (se llama **circunferencia trigonométrica**). Sea $P=(x_1,y_1)$ un punto de esta circunferencia.

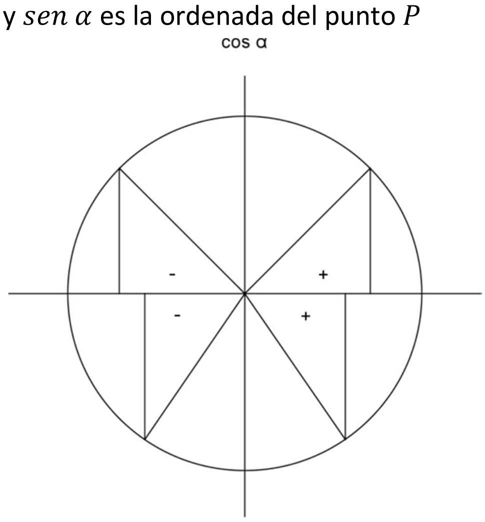


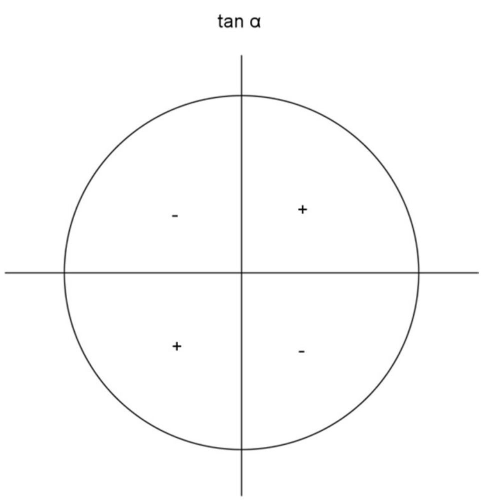
$$\cos\alpha=\frac{x_1}{1}=x_1$$

$$sen\ \alpha=\frac{y_1}{1}=y_1$$

Por lo tanto $\cos\alpha$ es la abscisa del punto P y $sen\ \alpha$ es la ordenada del punto P

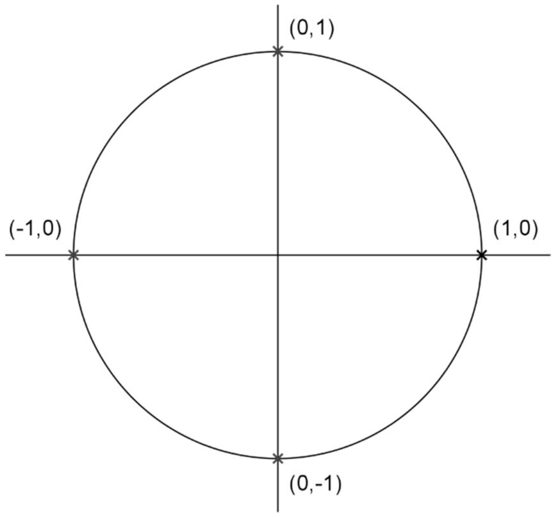






Ejemplos

1) Los ángulos $0^o, 90^o, 180^o$ y 270^o delimitan los cuatro cuadrantes tal como se muestra en la figura:

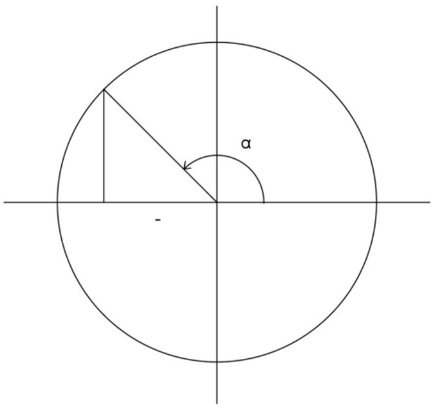


Por lo tanto, las razones trigonométricas de estos ángulos son las que aparecen en la tabla siguiente:

α	0^o	90^o	180^o	270^o
$sen\ \alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	No existe	0	No existe

2) Sabiendo que $sen\ \alpha = 0{,}8$ y α se encuentra en el 2º cuadrante calcula $\cos\alpha$ y $tan\ \alpha$.

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$0{,}8^2 + cos^2\alpha = 1$$
$$0{,}64 + cos^2\alpha = 1$$
$$cos^2\alpha = 1 - 0{,}64$$
$$cos^2\alpha = 0{,}36$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{0{,}36}$$
$$\cos\alpha = 0{,}6 \ \text{ ó } \ \cos\alpha = -0{,}6$$



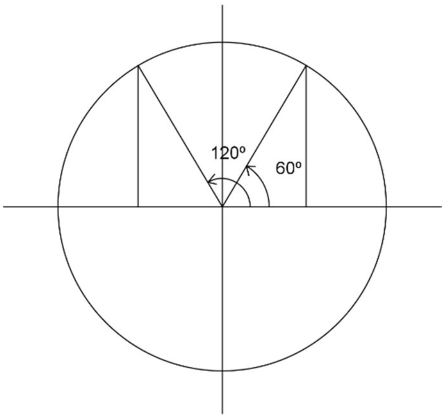
Por estar α en el 2º cuadrante $\cos\alpha < 0$.
Por lo tanto,

$$\cos\alpha = -0{,}6$$

$$\tan\alpha = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -1{,}33$$

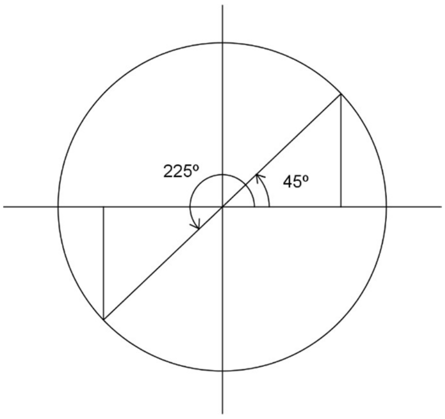
Reducción al primer cuadrante

1) Calcular las razones trigonométrica de 120^o reduciendo el ángulo al primer cuadrante.



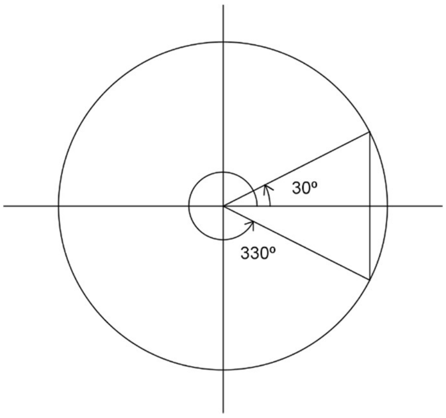
$$sen\ 120^o = sen\ 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 120^o = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$$
$$tan\ 120^o = \frac{sen\ 120^o}{\cos 120^o} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

2) Calcular las razones trigonométrica de 225^o reduciendo el ángulo al primer cuadrante.



$$sen\ 225^o = -sen\ 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 225^o = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$tan\ 225^o = \frac{sen\ 225^o}{\cos 225^o} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

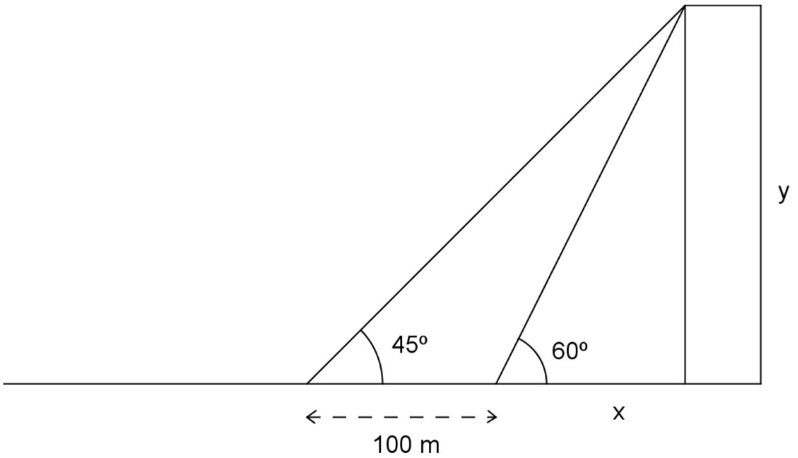
3) Calcular las razones trigonométrica de 330^o reduciendo el ángulo al primer cuadrante.



$$sen\ 330^o = -sen\ 30^o = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 330^o = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tan\ 330^o = \frac{sen\ 330^o}{\cos 330^o} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo

Desde un cierto punto se observa una torre bajo un ángulo de 60^o. Retrocedemos $100\ m$ y volvemos a observar la torre bajo un ángulo de 45^o. Calcular la altura de la torre.



$$\begin{cases} \tan 60^o = \dfrac{y}{x} \\ \tan 45^o = \dfrac{y}{100+x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} = \dfrac{y}{x} \\ 1 = \dfrac{y}{100+x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,x = y \\ 100 + \mathrm{x} = y \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{3}x = 100 + x$$
$$\sqrt{3}x - x = 100$$
$$(\sqrt{3} - 1)x = 100$$
$$x = \frac{100}{\sqrt{3} - 1}$$
$$y = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 236{,}60\ m$$

La torre mide $236{,}60\ m$