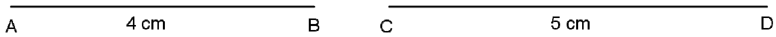
<u>Segmentos proporcionales</u>

Dibujamos segmentos de longitud 4 cm y 5 cm



El cociente entre los números de las dos medidas es la **razón** de los dos segmentos.

Obtenemos dos razones:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{4cm}{5cm}=\frac{4}{5} \text{ o } \frac{CD}{AB}=\frac{5cm}{4cm}=\frac{5}{4}$$

Dibujamos segmentos de longitud 8 cm y 10 cm

Obtenemos dos razones:

$$\frac{MN}{PQ}=\frac{8cm}{10cm}=\frac{4}{5} \text{ o } \frac{PQ}{MN}=\frac{10cm}{8cm}=\frac{5}{4}$$

Observamos que las razones de AB y CD, por una banda, y de MN y PQ por otra, son iguales. Diremos que los segmentos AB y CD son **proporcionales** a los segmentos MN y PQ.

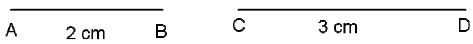
$$\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{PQ} \text{ o } \frac{CD}{AB}=\frac{PQ}{MN}$$

<u>Ejemplos</u>

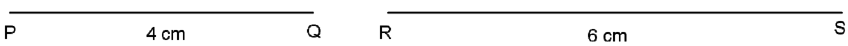
1) Sabemos que $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$, y que $AB=36cm$, $CD=2dm$ y $GH=25cm$. ¿Cuánto mide EF?

$$\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH} \rightarrow \frac{36\ cm}{20\ cm}=\frac{EF}{25cm} \rightarrow EF=\frac{25cm\cdot 36\ cm}{20\ cm}=45cm$$

2) Dibuja dos pares de segmentos que sean proporcionales a $\frac{2}{3}$

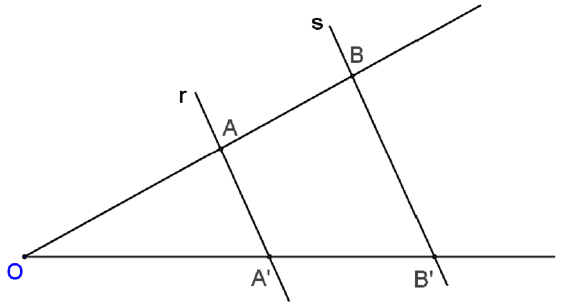


$$\frac{AB}{CD}=\frac{2cm}{3cm}=\frac{2}{3}$$



$$\frac{PQ}{RS}=\frac{4cm}{6cm}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Teorema de Tales



Si las rectas r y s son paralelas se cumple

I) $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{AB}{A'B'}$

II) $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'}$

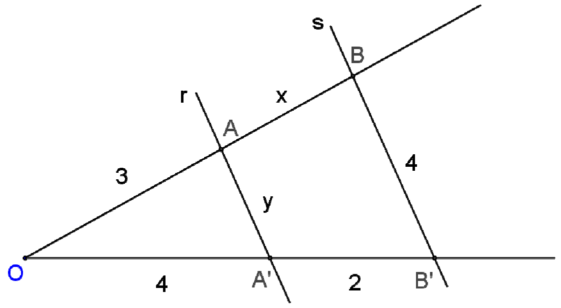
III) $\dfrac{OA}{AA'} = \dfrac{OB}{BB'}$

Rectas paralelas determinan segmentos proporcionales sobre rectas secantes

Ejemplos

Calcular x, y

a)



I) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{x}{2}$

$x = \dfrac{3 \cdot 2}{4} = 1{,}5$

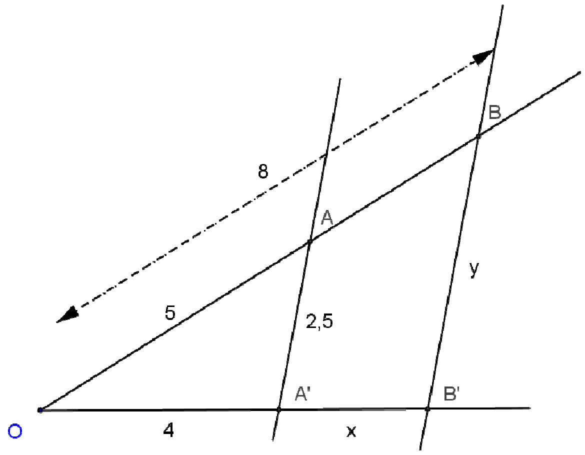
III) $\dfrac{3}{y} = \dfrac{4{,}5}{4}$

$3 \cdot 4 = 4{,}5\ y$

$12 = 4{,}5\ y$

$y = \dfrac{12}{4{,}5} = 2{,}66$

b)



II) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{4+x}{8}$

$32 = 5(4+x)$

$32 = 20 + 5x$

$32 - 20 = 5x$

$12 = 5x$

$x = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$

III) $\dfrac{5}{2{,}5} = \dfrac{8}{y}$

$5y = 2{,}5 \cdot 8$

$5y = 20$

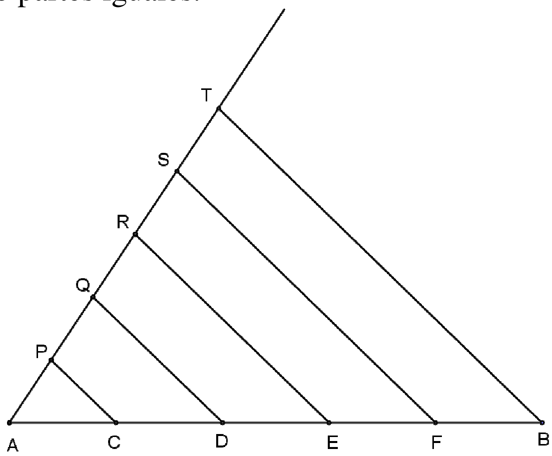
$y = \dfrac{20}{5}$

$y = 4$

División de un segmento en partes iguales

Consideramos un segmento AB arbitrario, que queremos dividir en cinco partes iguales.

Trazamos una semirrecta con origen en el punto A y, con el compás situamos cinco segmentos de la misma longitud. Son los segmentos AP, PQ, QR, RS y ST. A continuación, unimos el punto T con el punto B y, con la regla y la escuadra trazamos paralelas al segmento TB desde los puntos P, Q, R y S, las intersecciones de estas paralelas con el segmento AB determinan los puntos C, D, E y F, que dividen el segmento AB en cinco partes iguales.



Una vez dividido el segmento podemos establecer diferentes razones:

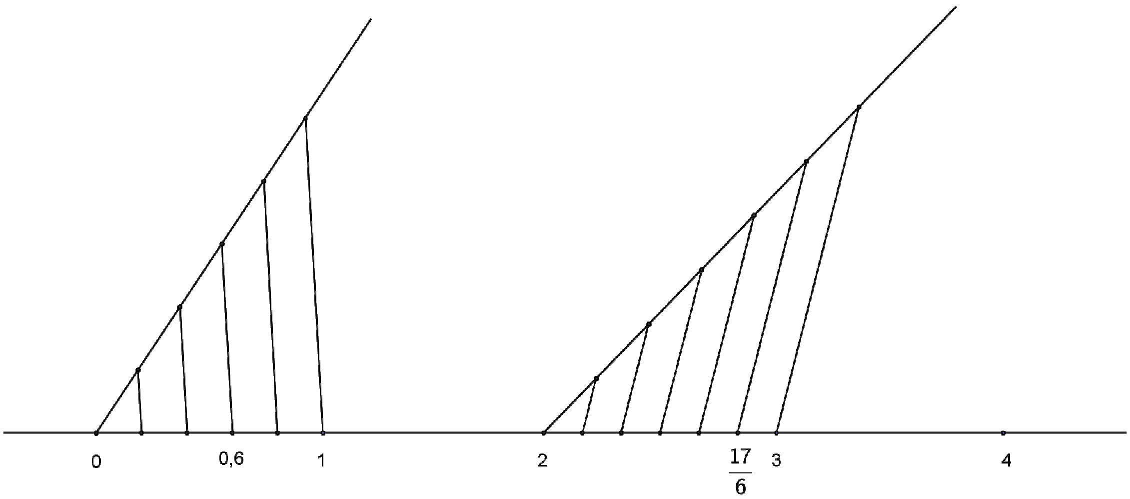
$$\frac{CD}{CF}=\frac{1}{3},\ \frac{DE}{DB}=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{CD}{CF}=\frac{DE}{DB} \qquad \frac{CF}{CB}=\frac{3}{4} \rightarrow CF=\frac{3}{4}CB$$

Ejemplo

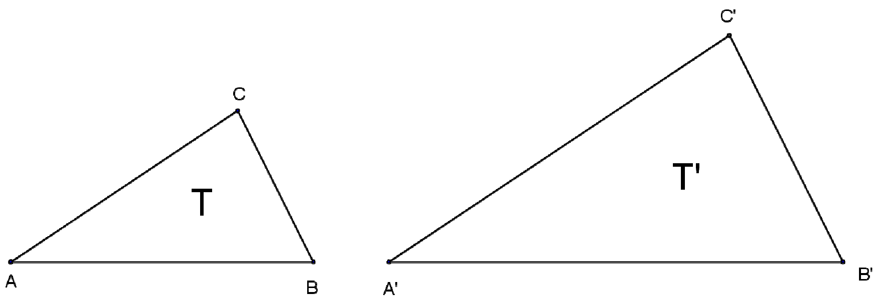
Representar sobre la recta numérica $0{,}6$ y $\frac{6}{17}$.

Transformamos $0{,}6$ a fracción: $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. La fracción está entre 0 y 1. Hay que dividir el segmento de extremos 0 y 1 en cinco partes y tomar tres.

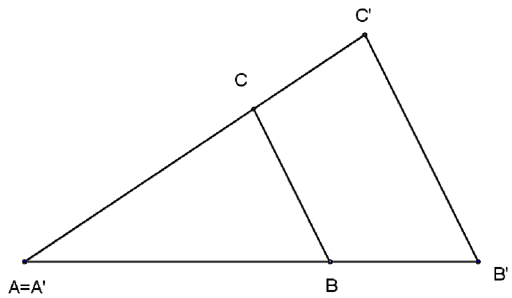
Convertimos la fracción impropia $\frac{17}{6}$ en fracción mixta: $\frac{17}{6} = 2 + \frac{5}{6}$. La fracción está entre 2 y 3. Hay que dividir el segmento de extremos 2 y 3 en seis partes y tomar cinco.



Triángulos semejantes



Dos triángulos T y T' son **semejantes** si se pueden colocar en posición de Tales, es decir, podemos poner un triángulo sobre el otro de manera que coincidan en un ángulo y los lados opuestos a este ángulo sean paralelos.



Los triángulos semejantes cumplen las propiedades siguientes:

I) Tienen los mismos ángulos

$$\widehat{A} = \widehat{A}', \ \widehat{B} = \widehat{B}' \text{ y } \widehat{C} = \widehat{C}'$$

II) Los lados son proporcionales

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

El número k se llama **razón de semejanza**

La propiedad I) es consecuencia de ser los lados CB y $C'B'$ paralelos, y la propiedad II) es consecuencia del teorema de Tales.

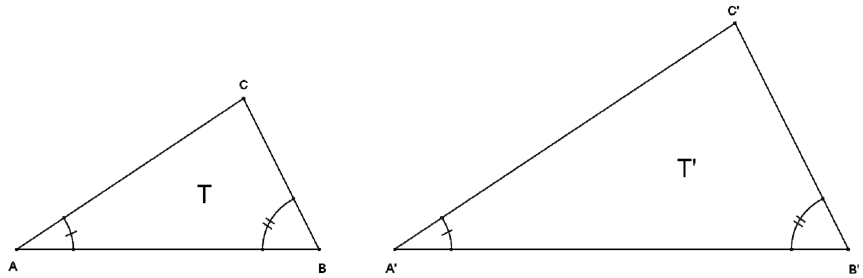
Los lados que unen los mismos ángulos en dos triángulos semejantes se llaman lados **homólogos.**

En los triángulos semejantes T y T' los lados AB, AC y BC son homólogos a los lados $A'B'$, $A'C'$ y $B'C'$.

Criterios de semejanza

Primer criterio de semejanza

Dos triángulos T y T' son semejantes si tienen dos ánulos iguales.



Si $\widehat{A} = \widehat{A}'$ y $\widehat{B} = \widehat{B}'$ entonces los triángulos T y T' son semejantes

En efecto.

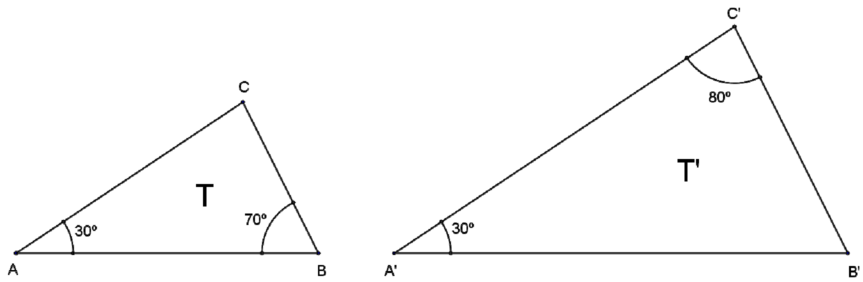
La suma de los ángulos de un triángulo es 180º

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180º \rightarrow \hat{C} = 180º - \hat{B} - \widehat{A}$

$\widehat{A}' + \widehat{B}' + \widehat{C}' = 180º \rightarrow \hat{C}' = 180º - \hat{B}' - \widehat{A}'$

Por lo tanto, $\widehat{C} = \widehat{C}'$. Los dos triángulos tienen los mismos ángulos y se pueden dibujar en posición de Tales, es decir, son semejantes.

Ejemplo

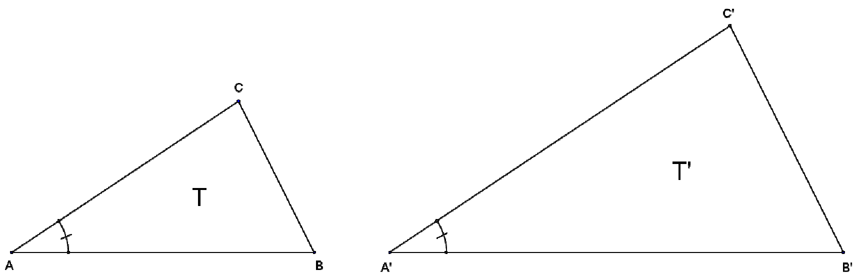


$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180º \rightarrow \hat{C} = 180º - \hat{B} - \widehat{A} = 180º - 30º - 70º = 80º$

Por lo tanto los triángulos T y T' tienen dos ángulos iguales y son semejantes.

Segundo criterio de semejanza

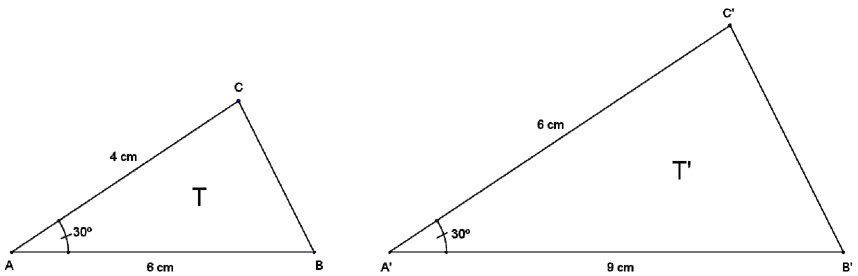
Dos triángulos T y T' son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que forman este ángulo son proporcionales



Si $\widehat{A} = \widehat{A}'$ y $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k$ entonces los triángulos T y T' son semejantes. Además, k es la razón de semejanza.

Si dibujas dos triángulos que tengan las características del enunciado de este criterio, verás que se pueden poner en posición de Tales y, por lo tanto, serán semejantes.

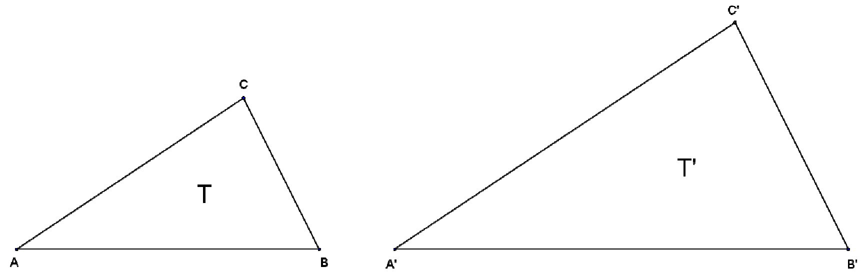
<u>Ejemplo</u>



Se cumple $\widehat{A} = \widehat{A}' = 30^o$ y $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ porque $\dfrac{6\,cm}{9\,cm} = \dfrac{4\,cm}{6\,cm} = \dfrac{2}{3}$. Por lo tanto, los triángulos T y T' son semejantes y, la razón de semejanza es $\dfrac{2}{3}$.

Tercer criterio de semejanza

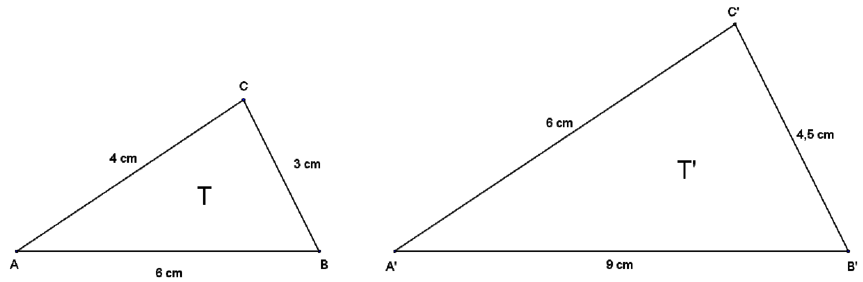
Dos triángulos T y T' son semejantes si tienen los tres lados proporcionales.



Si $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{CB}{C'B'} = k$ entonces los triángulos T y T' son semejantes. Además, k es la razón de semejanza.

Si dibujas dos triángulos que tengan las características del enunciado de este criterio, verás que se pueden poner en posición de Tales y, por lo tanto, serán semejantes.

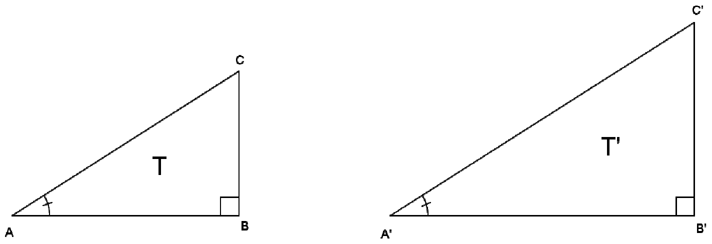
Ejemplo



Se cumple $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{CB}{C'B'}$ porque $\dfrac{6cm}{9cm} = \dfrac{4cm}{6cm} = \dfrac{3cm}{4{,}5cm} = \dfrac{2}{3}$. Por lo tanto, los triángulos T y T' son semejantes y, la razón de semejanza es $\dfrac{2}{3}$.

Triángulos rectángulos semejantes

Dos triángulos rectángulos T y T' son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.

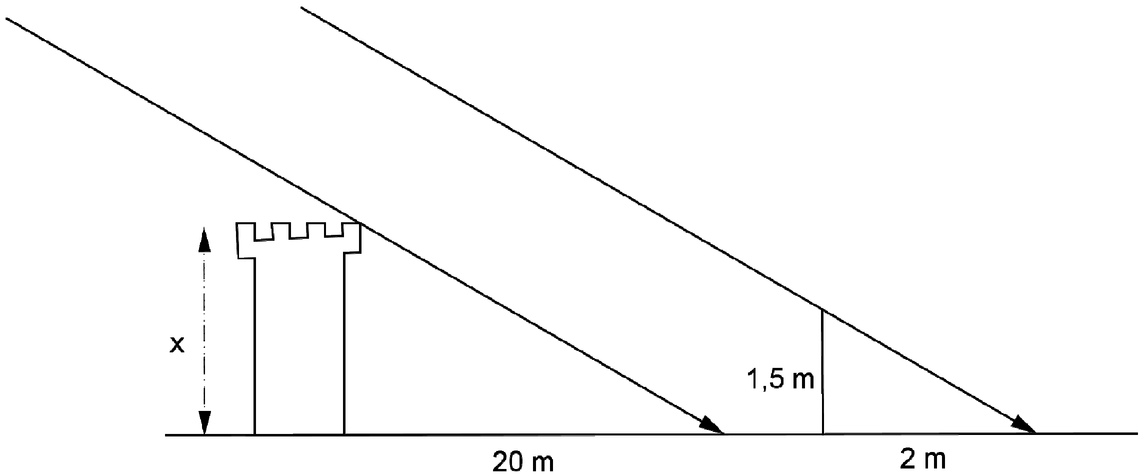


Si $\widehat{A} = \widehat{A}'$ entonces los triángulos rectángulos T y T' son semejantes.

En efecto, si tienen un ángulo agudo igual tienen dos ángulos iguales, porque los dos triángulos coinciden en este ángulo y el recto. Por lo tanto, aplicando el primer criterio de semejanza concluimos que los dos triángulos son semejantes.

Ejemplo

Calcular la altura de una torre, sabiendo que su sombra mide $20m$ y, a la misma hora, un palo vertical al suelo de $1{,}5\,m$ proyecta una sombra de $2\,m$

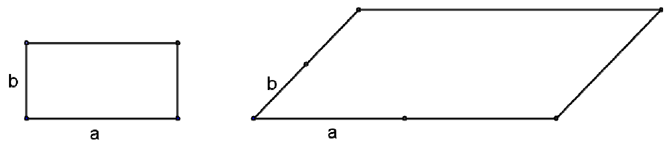


Como el Sol está muy alejado de la Tierra podemos considerar que los rayos que proyectan las sombras de la torre y el palo son paralelos. En consecuencia, los ángulos que forman estos rayos con el suelo son iguales. Por lo tanto, los triángulos rectángulos definidos por la torre y su sombra y, el palo y su sombra, son semejantes.

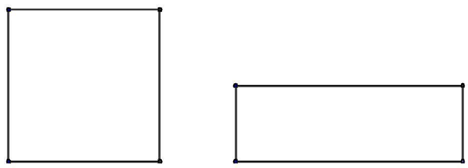
$$\frac{x}{1{,}5\,m} = \frac{20\,m}{2\,m} \rightarrow x = \frac{20\,m \cdot 1{,}5\,m}{2\,m} = 15\,m$$

Polígonos semejantes

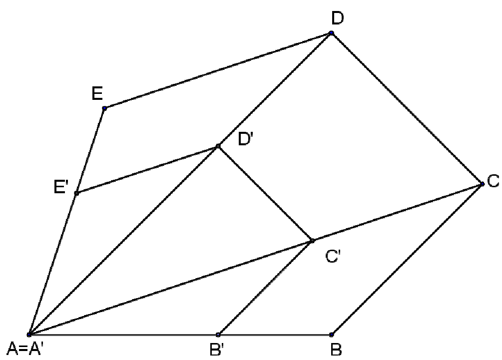
En el caso de los polígonos con más de tres lados no es suficiente comprobar que los lados son proporcionales. Por ejemplo, los lados de los cuadriláteros de la figura tienen razón 2 y no son semejantes, porque no tienen la misma forma.



Tampoco es suficiente comprobar que los polígonos tienen los mismos ángulos. Por ejemplo, un cuadrado y un rectángulo tienen los mismos ángulos pero no son semejantes porque no tienen la misma forma.



Dos polígonos con el mismo número de lados son **semejantes** si tienen ángulos iguales y los lados homólogos son proporcionales.

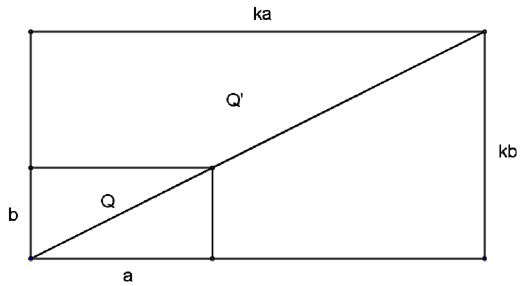


Dos polígonos son **semejantes** si tienen ángulos iguales y al superponer dos lados con el vértice común, los vértices homólogos están situados sobre la misma diagonal.

Esta propiedad es consecuencia de la descomposición de los dos polígonos en triángulos que están en posición de Tales.

Perímetro y área de dos figuras semejantes

Considero dos rectángulos semejantes Q y Q' con razón de semejanza k .



El perímetro del rectángulo Q es $2a + 2b = 2(a + b)$

El perímetro del rectángulo Q' es $2ka + 2kb = 2k(a + b)$

$$\frac{Perímetro\,de\,Q'}{Perímetro\,de\,Q} = \frac{2k(a+b)}{2(a+b)} = k$$

El área del rectángulo Q es ab

El área del rectángulo Q' es $kakb = k^2ab$

$$\frac{Area\,de\,Q'}{Area\,de\,Q} = \frac{k^2ab}{ab} = k^2$$

En general, se verifica:

La **razón de los perímetros** de dos figuras semejantes es la razón de semejanza

La **razón de las áreas** de dos figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.

Ejemplo

Dos triángulos semejantes T y T' tienen áreas de $30\,cm^2$ y $480cm^2$, respectivamente. Calcular el perímetro del triángulo pequeño sabiendo que el perímetro del triangulo mayor es $80\,cm$

Sea k la razón de semejanza.

$$k^2 = \frac{Area\,de\,T'}{Area\,de\,T} = \frac{480\,cm^2}{30\,cm^2} = 16 \rightarrow k = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{Perímetro\,de\,T'}{Perímetro\,de\,T} = 4 \rightarrow Perímetro\;\,de\,T = \frac{80\,cm}{4} = 20\,cm$$

Escalas

Una **escala** es la razón de semejanza entre las longitudes en un plano y sus correspondientes en la realidad.

Si la escala es 1:1, las imágenes del plano tienen el mismo tamaño que en la realidad. Diremos que es la **escala natural**.

Si la escala es del tipo 1:N, las longitudes reales se obtienen multiplicando por N las longitudes del plano. En este caso las imágenes de la realidad son mayores que las del plano, diremos que es una **escala de reducción**. Por ejemplo, el plano de un piso a escala 1:100.

Si la escala es del tipo N:1, las longitudes reales se obtienen dividiendo por N las longitudes del plano. En este caso las imágenes de la realidad son más pequeñas que las del plano, diremos que es una **escala de ampliación**. Por ejemplo, el dibujo de una célula a escala 1000:1.

Ejemplos

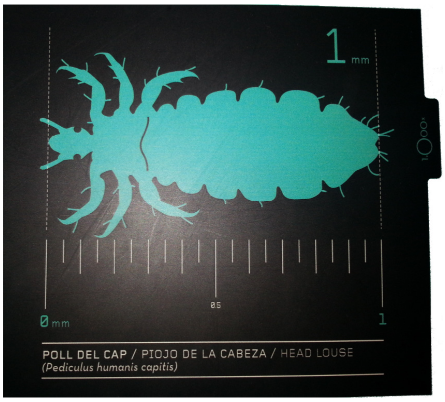
1) El ancho de una ventana mide 2,5 cm en un plano a escala 1:100. ¿Cuánto mide en la realidad?

$$100 \cdot 2{,}5\,cm = 250\,cm = 2{,}5\,m$$

2) ¿Cuánto distan en un plano a escala 1:10000000 dos ciudades separadas por 600 km en la realidad?

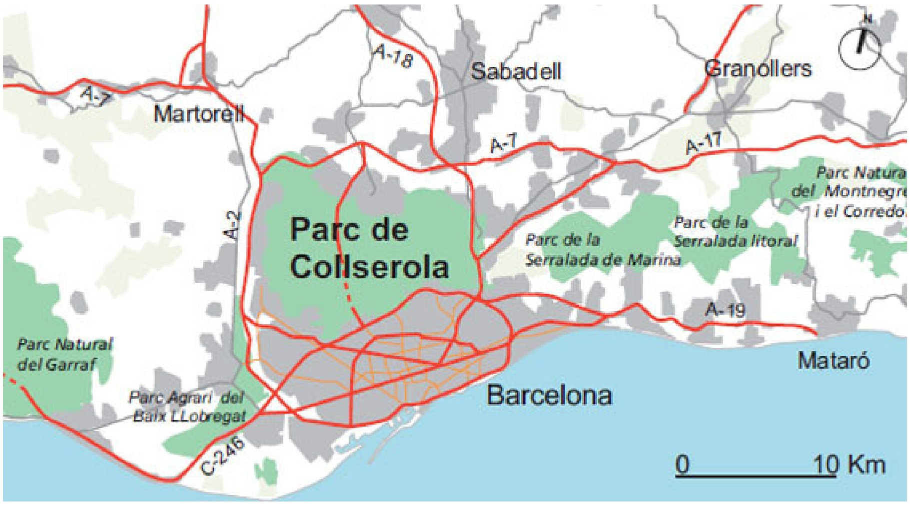
$$600\,km : 10000000 = 0{,}00006\,km = 6\,cm$$

3)



Es una imagen ampliada 1000x de un piojo, que se ha obtenido con un microscopio. Nos muestra gráficamente la longitud del parásito, 1 mm. A partir de la escala gráfica de ampliación se pueden calcular otras medidas mediante una proporción.

4)



En el mapa nos dan la escala gráficamente. A partir de la longitud representada en la leyenda, 10 km, podemos calcular cualquier distancia mediante una proporción.