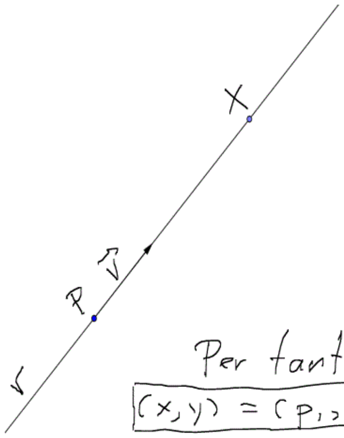
RECTES DEL PLA

Equacions de la recta



Sigui $P=(p_1,p_2)$ un punt de la recta r i $\vec{v}=(v_1,v_2)$ un vector director de la recta r.

Considero un punt arbitrari $X=(x,y)$ de la recta r

$\overrightarrow{PX}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents.

Per tant $\overrightarrow{PX}=\lambda\vec{v} \Longrightarrow X=P+\lambda\vec{v}$ on $\lambda\in\mathbb{R}$

$\boxed{(x,y)=(p_1,p_2)+\lambda(v_1,v_2)}$ on $\lambda\in\mathbb{R}$ (Equació vectorial)

$$\boxed{\begin{cases} x=p_1+\lambda v_1 \\ y=p_2+\lambda v_2 \end{cases}}$$ on $\lambda\in\mathbb{R}$ (Equacions paramètriques)

$$\begin{cases} \dfrac{x-p_1}{v_1}=\lambda \\ \dfrac{y-p_2}{v_2}=\lambda \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}}$$ (Equació contínua)

$$v_2(x-p_1)=v_1(y-p_2) \Longrightarrow v_2x-v_1y=v_2p_1-v_1p_2$$

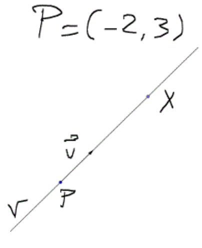
$\boxed{Ax+By=C}$ (Equació general) $\boxed{\vec{v}=(-B,A)}$ vector director

$By=-Ax+C \Longrightarrow y=-\dfrac{A}{B}x+\dfrac{C}{B} \Longrightarrow \boxed{y=mx+b}$ (Equació explícita)

m: pendent de la recta
b: ordenada a l'origen

Exemple

Trobeu les equacions de la recta que passa pel punt $P=(-2,3)$ i té vector director $\vec{v}=(4,-1)$



$X=(x,y)$ punt arbitrari de r

$r: X=P+\lambda\vec{v} \quad \lambda\in\mathbb{R}$

$r:(x,y)=(-2,3)+\lambda(4,-1)$ Equació vectorial

$$\boxed{\begin{cases} x = -2 + 4\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}}$$ $\lambda \in \mathbb{R}$ Equacions paramètriques

$$\boxed{\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-1}}$$ Equació contínua

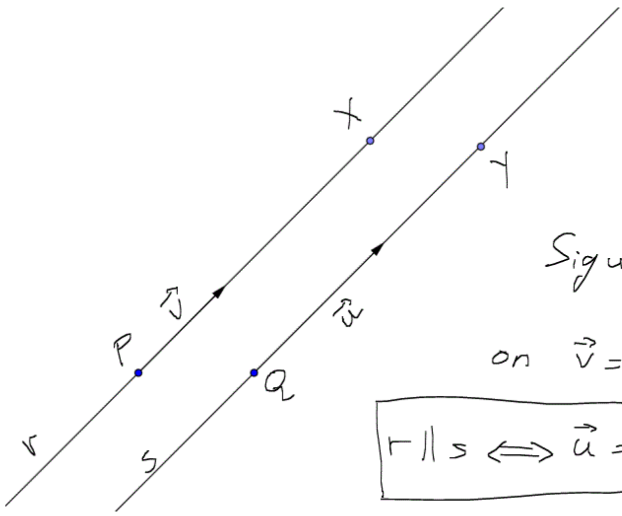
$-(x+2) = 4(y-3) \Longrightarrow -x-2 = 4y-12 \Longrightarrow \boxed{x+4y=10}$ Equació general

$4y = -x+10 \Longrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{10}{4} \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}}$ Equació explícita

$m = -\frac{1}{4}$ pendent de la recta r

$b = \frac{5}{2}$ ordenada a l'origen de la recta r

Rectes paral·leles



Dues rectes r i s són paral·leles si tenen la mateixa direcció

Siguin $r: X = P + \lambda \vec{v}$ i

$s: Y = Q + \mu \vec{u}$

on $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$$\boxed{r \parallel s \Longleftrightarrow \vec{u} = k \cdot \vec{v} \Longleftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}}$$

Proposició

$r: Ax + By = C$

$s: A'x + B'y = C'$

$$\boxed{r \parallel s \Longleftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}}$$

Demostració

$\vec{v} = (-B, A)$ és vector director de r

$\vec{u} = (-B', A')$ és vector director de s

$$r \parallel s \Longleftrightarrow \frac{-B}{-B'} = \frac{A}{A'} \Longleftrightarrow \frac{B}{B'} = \frac{A}{A'}$$

Proposició

Dues rectes són paral·leles si tenen la mateixa pendent

$r: y = mx + b$

$s: y = m'x + b'$

$$\boxed{r \parallel s \iff m = m'}$$

Demostració

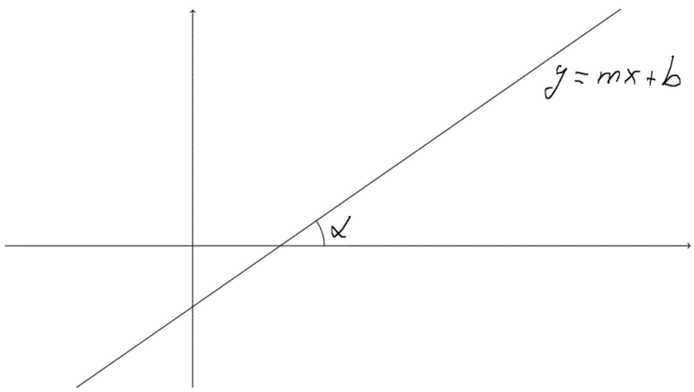
$r: \; y - mx = b$

$s: \; y - m'x = b'$

$$r \parallel s \iff \frac{1}{1} = \frac{-m}{-m'} \iff m = m'$$

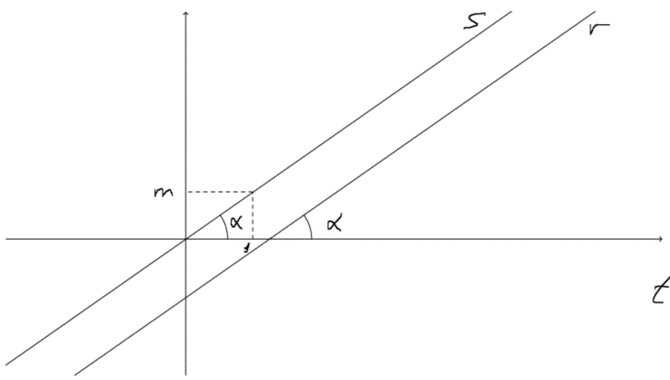
Proposició

La pendent d'una recta és la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscisses



$$\boxed{m = \tan\alpha}$$

Demostració



$r: y = mx + b$

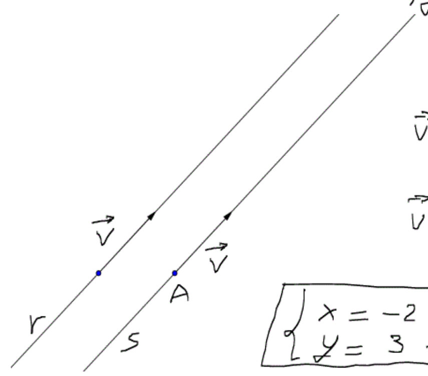
$s: y = mx$

s és la paral·lela a r que passa per $(0,0)$

$$\tan\alpha = \frac{m}{1} = m$$

Exemples

1) Trobeu les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt $A=(-2,3)$ i és paral·lela a la recta $r: (x,y)=(-4,2)+\lambda(3,-4)$



$s?$ $A\in s$ $s \parallel r$

$\vec{v}=(3,-4)$ vector director de r

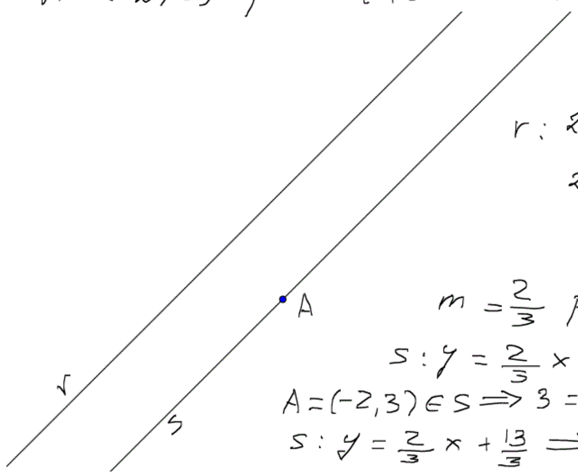
$\Downarrow$

$\vec{v}=(3,-4)$ vector director de s

$s: (x,y)=(-2,3)+\lambda(3,-4)$

$\boxed{\begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=3-4\lambda \end{cases}}$ Equacions paramétriques

2) Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $A=(-2,3)$ paral·lela a la recta $r: 2x-3y=4$



$s?$ $A\in s$ $s\parallel r$

$r: 2x-3y=4$

$2x-4=3y$

$y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$

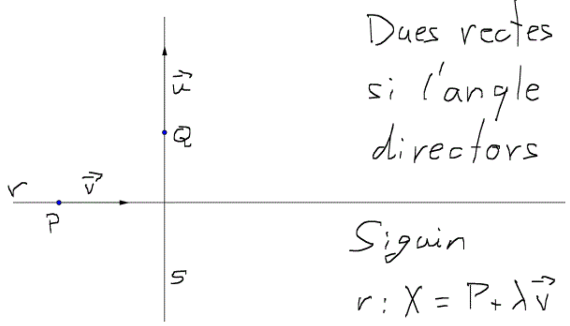
$m=\frac{2}{3}$ pendent de $r \Rightarrow \frac{2}{3}$ pendent de s

$s: y=\frac{2}{3}x+b$

$A=(-2,3)\in s \Longrightarrow 3=\frac{2}{3}\cdot(-2)+b \Longrightarrow 3=-\frac{4}{3}+b \Longrightarrow b=\frac{13}{3}$

$s: y=\frac{2}{3}x+\frac{13}{3} \Longrightarrow \boxed{2x-3y+13=0}$

Rectes perpendiculars



Dues rectes r i s són perpendiculars si l'angle que formen els seus vectors directors és de $90°$

Siguin

$r: X=P+\lambda\vec{v}$

$s: Y=Q+\mu\vec{u}$

$\boxed{r\perp s \Longleftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}=0}$

Proposició

$r: y = mx + b$

$s: y = m'x + b'$

$$\boxed{r \perp s \iff m' = -\frac{1}{m}}$$

Demostració

$r: -mx + y = b$ $\Rightarrow$ $\vec{v} = (-1, -m)$ vector director de r

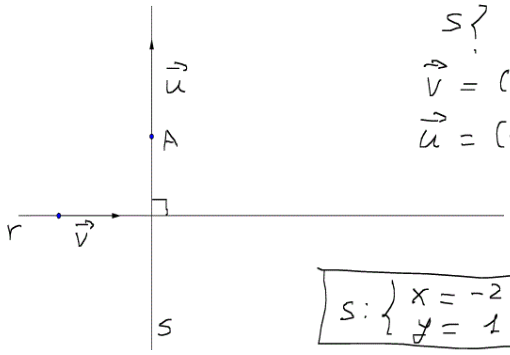
$s: -m'x + y = b'$ $\quad$ $\vec{u} = (-1, -m')$ vector director de s

$$r \perp s \iff \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \iff (-1)\cdot(-1) + (-m)\cdot(-m') = 0 \iff 1 + m \cdot m' = 0$$

$$r \perp s \iff m' = -\frac{1}{m}$$

Exemples

1) Trobeu les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt $A = (-2, 1)$ perpendicular a la recta $r: (x, y) = (4, 0) + \lambda (2, 3)$



s? $\quad A \in s \quad s \perp r$

$\vec{v} = (2, 3)$ vector director de r

$\vec{u} = (-3, 2)$ vector ortogonal a $\vec{v}$

$\Downarrow$

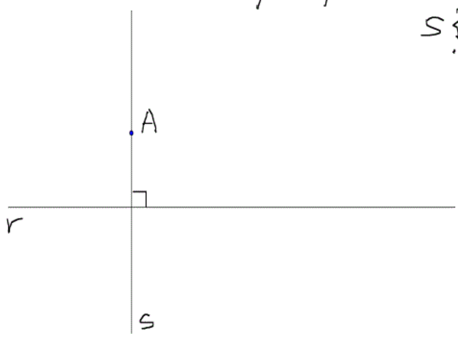
$\vec{u}$ és vector director de s

$s: (x, y) = (-2, 1) + \lambda (-3, 2)$

$$\boxed{s: \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}}$$ Equacions paramètriques

2) Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $A = (3, -1)$ perpendicular a $r: 2x + 5y - 3 = 0$

s? $\quad A \in s \quad s \perp r$



$r: 2x + 5y - 3 = 0$

$5y = -2x + 3$

$y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$

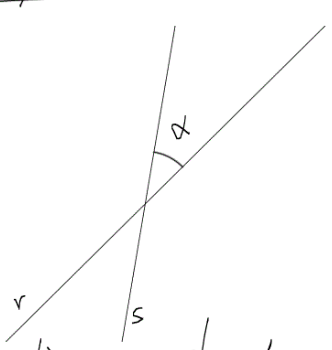
$m = -\frac{2}{5}$ pendent de r

$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2/5} = \frac{5}{2}$ pendent de s

$s: y = \frac{5}{2}x + b \qquad A \in s \Rightarrow -1 = \frac{5}{2} \cdot 3 + b \Rightarrow b = -1 - \frac{15}{2} = -\frac{17}{2}$

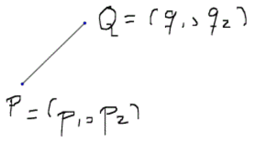
$s: y = \frac{5}{2}x - \frac{17}{2} \Rightarrow \boxed{s: 5x - 2y - 17 = 0}$

Angle de dues rectes



L'angle de dues rectes és el menor dels angles que formen les rectes.
El seu cosinus coincideix amb el valor absolut del cosinus de l'angle que formen els seus vectors directors.

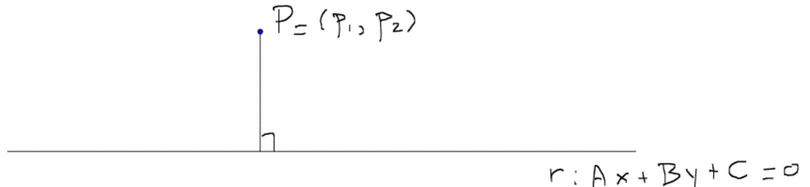
Distància entre dos punts



$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2}}$$

Distància d'un punt a una recta

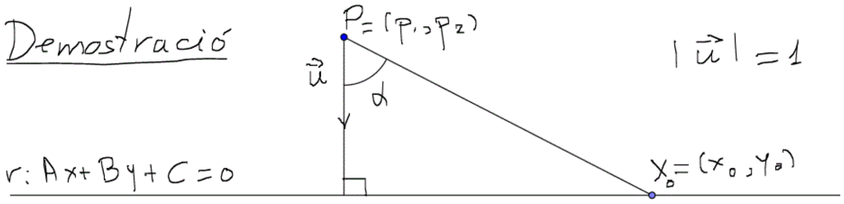


La distància $d(P,r)$ de un punt P a una recta r és la distància entre P i el peu de la perpendicular a r que passa per P.

Teorema

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Demostració



$|\vec{u}| = 1$ vector unitari

$$d(P,r) = |\overrightarrow{PX_0}| \cos\alpha = |\overrightarrow{PX_0}||\vec{u}| \cos\alpha = |\overrightarrow{PX_0} \cdot \vec{u}| = \left|(x_0-p_1, y_0-p_2)\cdot\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)\right| =$$

$$= \frac{|(x_0-p_1)A + (y_0-p_2)B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|x_0A + y_0B - p_1A - p_2B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-C - p_1A - p_2B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|p_1A + p_2B + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Exemples

1) Calculeu l'angle que formen les rectes $r: x = 4$ i $s: x - \sqrt{3}\,y + 4 = 0$

Sigui α l'angle que formen les rectes r i s

$\vec{v} = (0,1)$ vector director de r

$\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ vector director de s

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{|0\cdot\sqrt{3} + 1\cdot 1|}{\sqrt{0^2+1^2}\,\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \widehat{\vec{u},\vec{v}} = 60^\circ$$

Les rectes formen un angle de 60°

2) Calculeu la distància entre els punts $P = (-1, 4)$ i $Q = (3, -2)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

3) Calculeu la distància del punt $P = (-1, 4)$ a la recta $r: -2x + 3y + 1 = 0$

$$d(P,r) = \frac{|-2\cdot(-1) + 3\cdot 4 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{13}} = \frac{15\sqrt{13}}{13}$$