UNIDAD 3. LA PROPORCION

<u>Términos de una proporción</u>

Una **razón** es una división entre dos números

$$\frac{12}{5} \text{ y } \frac{4'3}{2'5} \text{ son razones}$$

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones

$$\frac{12}{15}=\frac{8}{10} \text{ es una proporción porque } 12:15=0'8 \text{ y } 8:10=0'8$$

$$\frac{5'5}{2'5}=\frac{7'7}{3'5} \text{ es una proporción porque } 5'5:2'5=2'2 \text{ y } 7'7:3'5=2'2$$

En una **proporción** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ los números a y d se llaman **extremos**, y los números c y b se llaman **medios**.

En una proporción se cumple que el **producto de los extremos es igual al producto de los medios**.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a\cdot d=b\cdot c$$

$$\frac{5'5}{2'5}=\frac{7'7}{3'5} \text{ se cumple que } 5'5\cdot 3'5=19'25 \text{ y } 7'7\cdot 2'5=19'25$$

<u>Ejemplos</u>

Encuentra el término desconocido x en cada una de las proporciones:

1) $\frac{x}{4}=\frac{3}{5}$

$5\cdot x=3\cdot 4$

$x=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}=2'4$

2) $\frac{10}{3}=\frac{2}{x}$

$10\cdot x=2\cdot 3$

$x=\frac{2\cdot 3}{10}=\frac{6}{10}=0'6$

3) $\frac{12}{x}=\frac{x}{3}$

$x\cdot x=12\cdot 3$

$x^2=36$

$x=\sqrt{36}=6$

Magnitudes directamente proporcionales

Los litros consumidos por un coche y la distancia recorrida:

Distancia recorrida (km)	100	200	300	400	500	600	...	900	....
Consumo (l)	9	18	27	36	45	54	...	81	....

$$0{,}09 = \frac{9}{100} = \frac{18}{200} = \frac{27}{300} = \frac{36}{400} = \frac{45}{500} = \frac{54}{600} = \frac{81}{900}$$

El consumo de gasolina es de 0,09 l/km

Cuando se duplica, triplica, cuadruplica la distancia recorrida también se duplica, triplica, cuadruplica el consumo.

Diremos que dos **magnitudes son directamente proporcionales** cuando al aumentar una (el doble, el triple, el cuádruple, etc.) también se aumenta la otra (el doble, el triple, el cuádruple, etc.).

La distancia recorrida por el coche y el consumo de gasolina son **magnitudes directamente proporcionales**.

La razón de dos magnitudes directamente proporcionales es constante.

Problemas de proporción directa

Un coche tarda 4 horas en recorrer 360 km. Si mantiene esa velocidad, ¿cuánto recorrerá en 5 horas?

Método 1. Reducción a la unidad

En 4 horas recorre 360 km
En 1 hora recorre 360 : 4 = 90 km
En 5 horas recorre 90 · 5 = **450 km**

Método 2. Proporción directa

El tiempo que tarda el coche y la distancia recorrida son magnitudes directamente proporcionales. Por lo tanto, la razón entre la distancia recorrida y el tiempo que tarda el coche es constante.

$$\frac{360\ km}{4h} = \frac{x\,km}{5h}$$

$$4 \cdot x = 360 \cdot 5$$

$$x = \frac{360 \cdot 5}{4} = \frac{1800}{4} = \mathbf{450\ km}$$

Método 3. Regla de tres

360 km___________________4 h

x km ___________________5 h

$$x = \frac{360 \cdot 5}{4} = \frac{1800}{4} = \mathbf{450\ km}$$

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos ciudades están separadas 150 km y queremos ir de una ciudad a la otra, a una velocidad constante.

Velocidad de la marcha (km/h)	150	75	50	37’5	30	25	…
Tiempo utilizado en el recorrido (h)	1	2	3	4	5	6	…

$150 = 150 \cdot 1 = 75 \cdot 2 = 50 \cdot 3 = 37'5 \cdot 4 = 30 \cdot 5 = 25 \cdot 6$

Cuando se duplica, triplica, cuadruplica el tiempo recorrido, la velocidad disminuye a la mitad, a un tercio, a un cuarto.

Diremos que dos **magnitudes son inversamente proporcionales** cuando al aumentar una (el doble, el triple, el cuádruple, etc.) la otra disminuye (a la mitad, a un tercio, a un cuarto, etc.).

La velocidad de la marcha y el tiempo utilizado en el recorrido son **magnitudes inversamente proporcionales**.

El producto de dos magnitudes inversamente proporcionales es constante.

Problemas de proporción inversa

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

Método 1. Reducción a la unidad

3 hombres necesitan 24 días
1 hombre necesita 3·24 = 72 días
18 hombres necesitan 72:18 = **4 días**

Método 2. Proporción inversa

El número de hombres que realizan el trabajo y el tiempo que necesitan para realizarlo son magnitudes inversamente proporcionales. Por lo tanto, el producto del número de hombres por el tiempo es constante.

3 hombres · 24 días = 18 hombres · x días

$$x = \frac{3 \cdot 24}{18} = \frac{72}{18} = \mathbf{4\ días}$$

Método 3. Regla de tres inversa

3 hombres________________24 días

18 hombres_______________ x días

3 hombres · 24 días = 18 hombres · x días

$$x = \frac{3 \cdot 24}{18} = \frac{72}{18} = \mathbf{4\ días}$$

Porcentajes

1.- Un ordenador vale 600 €. ¿Cuál será el precio final de venta si se aplica un I.V.A. del 21%?

$$\text{El I.V.A. es el 21\% de 600 €} = \frac{21}{100}\cdot 600\,€ = \frac{21\cdot 600}{100} = 126\,€$$

El precio final es 600 € + 126 € = **726 €**

2.- En una clase de 30 alumnos 12 alumnos han suspendido un examen de Matemáticas. ¿Qué porcentaje de la clase ha suspendido el examen?

El **tanto por uno** es $\frac{12}{30} = 0'4$

El **tanto por ciento** es $0'4 \cdot 100 = \mathbf{40\%}$

3.- Después de hacernos una rebaja del 15 % pagamos por un teléfono móvil 204 € ¿Cuánto valía el móvil antes de que se aplicara la rebaja?

Sin rebaja		Con rebaja
100 €	____________________	85 €
x €	____________________	204 €

$$x = \frac{100\cdot 204}{85} = \frac{20400}{85} = \mathbf{240\ €}$$

Repartos directamente proporcionales

Pedro, Antonio y María compran un décimo de lotería poniendo cada uno 9 €, 6 € y 5 €, respectivamente. Si el número ha sido premiado con 10000 €, ¿cómo deberán repartirse el premio?

El décimo vale 9 € + 6€ + 5 € = 20 €

El premio es de 10000 €

Pedro:

20 € ______________ 10000 €

9 € ______________ x €

$$x = \frac{9 \cdot 10000}{20} = \frac{90000}{20} = \mathbf{4500\ €}$$

Antonio:

20 € ______________ 10000 €

6 € ______________ x €

$$x = \frac{6 \cdot 10000}{20} = \frac{60000}{20} = \mathbf{3000\ €}$$

María:

10000 € - (4500 € + 3000 €) = 10000 € - 7500 € = **2500 €**

Repartos inversamente proporcionales

Un club de futbol decide repartir una prima de 120000 € entre los dos porteros del primer equipo en partes inversamente proporcionales a los goles que les han hecho durante la temporada, 16 y 24 respectivamente. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?

Calculamos los inversos de 16 y 24: $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{24}$

Sumamos las dos cantidades

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{24}=\frac{3}{48}+\frac{2}{48}=\frac{5}{48}$$

A continuación calculamos las cantidades que hay que repartir

Portero 1:

$$\frac{5}{48} \text{ ——————— } 120000\ €$$

$$\frac{1}{16} \text{ ——————— } x\ €$$

$$x=\frac{1}{16}\cdot 120000 : \frac{5}{48}=\frac{120000}{16}:\frac{5}{48}=\frac{120000\cdot 48}{16\cdot 5}=\frac{5760000}{80}=\mathbf{72000\ €}$$

Portero 2:

$$\frac{5}{48} \text{ ——————— } 120000\ €$$

$$\frac{1}{24} \text{ ——————— } x\ €$$

$$x=\frac{1}{24}\cdot 120000 : \frac{5}{48}=\frac{120000}{24}:\frac{5}{48}=\frac{120000\cdot 48}{24\cdot 5}=\frac{5760000}{120}=\mathbf{48000\ €}$$

Factores de conversión

Pasar $234\,\mathrm{min}$ a horas

$$234\,\mathrm{min} = 234\,\mathrm{min} \cdot \frac{1h}{60\,\mathrm{min}} = \frac{234}{60}h = 3'9h$$

Pasar $2'4h$ a minutos

$$2'4h = 2'4h \cdot \frac{60\,\mathrm{min}}{1h} = 2'4 \cdot 60\ \mathrm{min} = 144\,\mathrm{min}$$

Pasar la velocidad $90\,km/h$ a m/s

$$90\,km/h = \frac{90\,km}{1\,h} \cdot \frac{1000\,m}{1\,km} \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} = \frac{90 \cdot 1000}{3600}m/s = 25\,m/s$$

11) pág. 69

Regla de tres inversa

15 trabajadores________________9 días

x trabajadores________________5 días

$$15 \cdot 9 = 5 \cdot x$$

$$x = \frac{15 \cdot 9}{5} = \frac{135}{5} = \textbf{27 trabajadores}$$

8) pág. 67

Regla de tres inversa

32 días_________________6 h diarias

x días_________________8 h diarias

$$8 \cdot x = 32 \cdot 6$$

$$x = \frac{32 \cdot 6}{8} = \frac{192}{8} = \textbf{24 días}$$

10) pág. 67

Regla de tres

96 m^2__________________48 €

65 m^2__________________ x €

$$x = \frac{48 \cdot 65}{96} = \frac{3120}{96} = \textbf{32'5 €}$$

La finca tiene 7 pisos de 96 m^2 y 7 pisos de 65 m^2

Los vecinos pagan trimestralmente:

7 · 48 € + 7 · 32’5 € = 336 € + 227’5 € = 563’5 €

Los vecinos pagan anualmente 4 · 563’5 € = **2254 €**

11) pág. 67

La chaqueta vale 54 € y a final de temporada vale 43’20 €

¿Cuál es el tanto por ciento de descuento?

El descuento es 54 € - 43’20 € = 10’80 €

El **tanto por uno de descuento** es $\frac{10'80}{54} = 0'2$

El **tanto por ciento de descuento** es 0’2 · 100 = **20 %**

12) pág. 67

Regla de tres inversa

8 amigos ________________ 15 días

6 amigos ________________ x días

$$6 \cdot x = 8 \cdot 15$$

$$x = \frac{8 \cdot 15}{6} = \frac{120}{6} = \textbf{20 días}$$

Regla de tres inversa

8 amigos ________________ 15 días

12 amigos ________________ x días

$$12 \cdot x = 8 \cdot 15$$

$$x = \frac{8 \cdot 15}{12} = \frac{120}{12} = \textbf{10 días}$$

18) pág. 68

La rebaja es del 25%

Sin rebaja	Con rebaja
100 €	75 €
x €	37’80 €

$$x = \frac{100 \cdot 37'80}{75} = \frac{3780}{75} = \textbf{50'40 €}$$

7) pág. 67

Tres camiones pueden cargar 4t, 5t y 6t

Han de repartir 9t de forma directamente proporcional a estas cargas

4t + 5t + 6t = 15t

Primer camión:

15 t ______________ 4 t

9 t ________________ x t

$$x = \frac{9 \cdot 4}{15} = \frac{36}{15} = \mathbf{2'4\ t}$$

Segundo camión:

15 t ______________ 5 t

9 t ________________ x t

$$x = \frac{9 \cdot 5}{15} = \frac{45}{15} = \mathbf{3\ t}$$

Tercer camión:

9 t - (2’4 t + 3 t) = 9 t – 5’4 t = **3’6 t**

13) pág. 68

Tres vidrieros ponen 156 ventanas.

Los tres vidrieros ponen 80 ventanas, 46 ventanas y 30 ventanas, respectivamente.

Se ha de repartir 3510 € de forma directamente proporcional al número de ventanas que ha puesto cada vidriero.

Primer vidriero:

156 ventanas ______________3510 €

80 ventanas________________ x €

$$x = \frac{80 \cdot 3510}{156} = \frac{280800}{156} = \mathbf{1800\ €}$$

Segundo vidriero:

156 ventanas ______________3510 €

46 ventanas________________ x €

$$x = \frac{46 \cdot 3510}{156} = \frac{161460}{156} = \mathbf{1035\ €}$$

Tercer vidriero:

3510 € - (1800 € + 1035 €) = 3510 € - 2835 € = **675 €**

15) pág. 68

Tres pintores han trabajado 16 h, 10 h y 24 h

Han cobrado en total 1660 € y se han gastado 500 € de material.

$$1660 \text{ €} - 500 \text{ €} = 1160 \text{ €}$$

Repartimos 1160 € de forma directamente proporcional a las horas trabajadas.

Número total de horas trabajadas 16 h + 10 h + 24 h = 50 h

Primer pintor:

50 h ______________ 1160 €

16 h ______________ x €

$$x = \frac{16 \cdot 1160}{50} = \frac{18560}{50} = \mathbf{371'20\ €}$$

Segundo pintor:

50 h ______________ 1160 €

10 h ______________ x €

$$x = \frac{10 \cdot 1160}{50} = \frac{11600}{50} = \mathbf{232\ €}$$

Tercer pintor:

1160 € - (371’20 € + 232 €) = 1160 € - 603’20 € = **556’80 €**

16) pág. 68

Hay que repartir 165 € de forma inversamente proporcional al lugar que ocupan los premiados

Calculamos los inversos de 1, 2 y 3: $1,\ \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$

Sumamos las tres cantidades

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{6}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{11}{6}$$

A continuación calculamos las cantidades que hay que repartir

Primer premio:

$$\frac{11}{6}\ \underline{\qquad\qquad\qquad}\ 165\ €$$

$$1\ \underline{\qquad\qquad\qquad}\ x\ €$$

$$x=1\cdot 165:\frac{11}{6}=165:\frac{11}{6}=\frac{165\cdot 6}{11}=\frac{990}{11}=\mathbf{90\ €}$$

Segundo premio:

$$\frac{11}{6}\ \underline{\qquad\qquad\qquad}\ 165\ €$$

$$\frac{1}{2}\ \underline{\qquad\qquad\qquad}\ x\ €$$

$$x=\frac{1}{2}\cdot 165:\frac{11}{6}=\frac{165}{2}:\frac{11}{6}=\frac{165\cdot 6}{2\cdot 11}=\frac{990}{22}=\mathbf{45\ €}$$

Tercer premio:

165 € - (90 € + 45 €) = 165 € - 135 € = **30 €**

9) pág 67

$10\ \%$ de $360^o=\frac{10}{100}\cdot 360^o=36^o$

$20\ \%$ de $360^o=\frac{20}{100}\cdot 360^o=72^o$

$30\ \%$ de $360^o=\frac{30}{100}\cdot 360^o=108^o$

$40\ \%$ de $360^o=\frac{40}{100}\cdot 360^o=144^o$