UNIDAD 9. PROBABILIDAD

El lenguaje de los experimentos aleatorios

Los experimentos que se rigen por el azar, conjunto de causas desconocidas que producen un efecto que no es previsible, se llaman **experimentos aleatorios**. Por ejemplo, los experimentos: "Lanzar un dado", "Lanzar una moneda", "Escoger una carta de una baraja española" son experimentos aleatorios.

El conjunto de todos resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**. El espacio muestral del experimento aleatorio "Lanzar un dado" es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Se llama **suceso elemental** de un experimento aleatorio a cada uno de los resultados que podemos obtener. Los sucesos elementales del experimento lanzar un dado son $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\ y\ \{6\}$.

En general, se llama **suceso** de un experimento aleatorio a cualquier subconjunto formado por elementos del espacio muestral.

A: "Obtener número par" $\rightarrow A = \{2,4,6\}$

B: "Obtener número mayor que 2" $\rightarrow B = \{3,4,5,6\}$

El suceso que contiene todos los elementos del espacio muestral se llama **suceso seguro**. Este suceso se realiza siempre. Por ejemplo, el suceso "Obtener menor que 7" es el suceso seguro

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

El suceso que no se realiza nunca se llama **suceso imposible**, no contiene ningún resultado. Es el conjunto vacío $\emptyset$. Por ejemplo, el suceso "Obtener número menor que 1" es el suceso imposible.

Dos sucesos son contrarios si no tiene ningún suceso elemental en común. El contrario de un suceso S se representa por $\bar{S}$.

El suceso contrario de A: "Obtener número par" es

$\bar{A}$: "Obtener número impar" $\quad \bar{A} = \{1,3,5\}$

El suceso contrario de B: "Obtener número mayor que 2" es

$\bar{B}$: "Obtener número menor que 3 $\quad \bar{B} = \{1,2\}$

Ejemplo

Considero el experimento aleatorio lanzar dos monedas.

El espacio muestral es $E = \{cc, c+, +c, ++\}$

El suceso A: "Obtener una cruz como mínimo" es $A = \{c+, +c, ++\}$

El suceso contrario es $\bar{A}$: "No obtener ninguna cruz" es $\bar{A} = \{cc\}$

Fórmula de Laplace

La probabilidad es una medida del azar de un suceso, su valor es un número comprendido entre 0 y 1. Los sucesos que tienen probabilidad próxima a 0 no ocurren casi nunca, y los sucesos que tienen probabilidad próxima a 1 suelen ocurrir muy frecuentemente.

Si los sucesos elementales del experimento aleatorio son igual de probables la probabilidad del suceso A se calcula aplicando la fórmula:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ del\ suceso\ A}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

Propiedades de la probabilidad

La probabilidad del suceso contrario es $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

La probabilidad del suceso seguro es $P(E) = 1$

La probabilidad del suceso imposible es $P(\emptyset) = 0$

Ejemplos

1) Considero el experimento aleatorio "lanzar un dado"

El espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Suceso A: "Obtener un número par" " $\rightarrow A = \{2,4,6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Suceso B: "Obtener un número mayor que 2 " $\rightarrow B = \{3,4,5,6\}$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Suceso C: "Obtener un número primo " $\rightarrow C = \{2,3,5\}$

$$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Suceso $\bar{C}$: "Obtener un número compuesto"

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2) Considero el experimento aleatorio “lanzar dos veces una moneda”

El espacio muestral es $\mathrm{E} = \{\mathrm{cc}, \mathrm{c}+, +\mathrm{c}, ++\}$

Suceso A: “Obtener dos veces cara” → $A = \{cc\}$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Suceso B: “Obtener cara en el primer lanzamiento” → $B = \{cc, c+\}$

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Suceso C: “Obtener alguna cruz” → $C = \{ c+, +c, ++\}$

$$P(C) = \frac{3}{4}$$

Suceso $\bar{C}$: “No obtener ninguna cruz”

$$P(\bar{C}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Frecuencia relativa

La frecuencia relativa de un suceso A se calcula repitiendo el experimento aleatorio varias veces, mediante la fórmula siguiente:

$$f(A) = \frac{Número\ de\ veces\ que\ se\ realiza\ el\ suceso\ A}{Número\ de\ repeticiones\ del\ experimento}$$

La frecuencia relativa $f(A)$ se aproxima a la probabilidad $P(A)$ cuando en número de repeticiones del experimento aleatorio es grande.

Ejemplo

Consideramos el experimento aleatorio "lanzar una chincheta". Calcular las probabilidades de los sucesos A:"Obtener canto" y B:"Obtener punta".

No podemos asegurar que estos sucesos tienen probabilidad $\frac{1}{2}$, como en el caso del lanzamiento de una moneda, porque la chincheta no es regular.

Para calcular las probabilidades lanzamos la chincheta 100 veces, obteniendo los siguientes resultados:

Suceso	A:"Obtener canto"	B:"Obtener punta".
Número de veces que se ha realizado	43	57

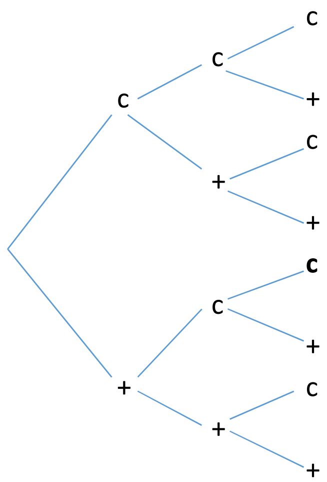
$$P(A) \approx f(A) = \frac{43}{100} = 0{,}43$$

$$P(B) \approx f(B) = \frac{57}{100} = 0{,}57$$

Observamos que estos sucesos no tienen la misma probabilidad.

Experimentos aleatorios compuestos

Hay experimentos aleatorios que se pueden considerar compuestos de otros experimentos aleatorios. Por ejemplo, “Lanzar tres veces una moneda” se puede considerar compuesto de repetir tres veces el experimento simple “Lanzar una moneda”



El espacio muestral es

$E = \{ccc,\ cc+,\ c+c,\ c++, +cc\ , +c+\ , ++c\ , +++\}$

Considero los siguientes sucesos:

A: “Obtener tres cruces” $A = \{+++\}$ $P(A) = \frac{1}{8}$

B: “Obtener dos caras” $B = \{cc+\ , +cc, c+c\}$ $P(B) = \frac{3}{8}$

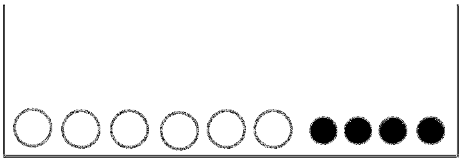
C: “Obtener al menos una cara” $C = \{ccc\ , cc+, c+c\ , c++, +cc, +c+\ , ++c\}$ $P(C) = \frac{7}{8}$

El cálculo de la probabilidad de C también se puede hacer utilizando el suceso contrario porque $C = \bar{A}$.

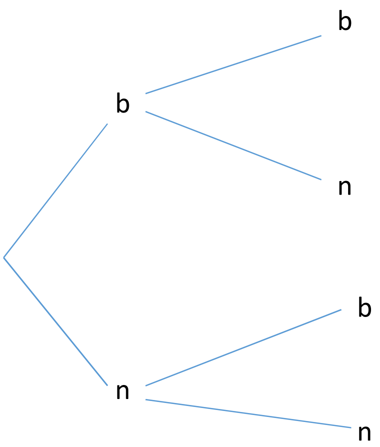
$$P(C) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Cálculo directo de probabilidades a partir de diagramas en árbol

Consideramos una urna que contiene 6 bolas blancas y 4 negras, de la cual extraemos dos bolas sin remplazamiento.



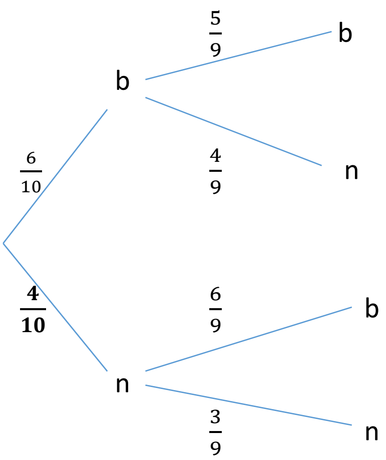
Los resultados que se pueden obtener se observan en el diagrama en árbol.



El espacio muestral es

$$E = \{(b,b),(b,n),(n,b),(n,n)\}$$

Calculamos la probabilidad de las diferentes opciones y las colocamos en cada una de las ramas del árbol.



A continuación calcularemos la probabilidad de extraer dos bolas blancas. Si repitiéramos muchas veces el experimento los $\frac{5}{9}$ de los $\frac{6}{10}$ de los casos se obtendrían dos bolas blancas. Por lo tanto, se multiplican las probabilidades.

$$P(b,b) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

De la misma manera, obtenemos las probabilidades de los otros resultados

$$P(b,n) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

$$P(n,b) = \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

$$P(n,n) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

Se puede comprobar que la suma de estas probabilidades es 1.

$$P(b,b) + P(b,n) + P(n,b) + P(n,n) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = 1$$