Polinomis

Un polinomi és una expressió algèbrica del tipus

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on $n \in \mathbb{N}$ i $a_k \in \mathbb{R}$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Al nombre n se l'anomena grau del polinomi $P(x)$

$$\text{grad}(P(x)) = n$$

i als nombres a_k coeficients.

El coeficient a_0 s'anomena terme independent

Exemples

1) $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 3$ és un polinomi

$\text{grad}(P(x)) = 4$

Els coeficients són $a_4 = 3$ $a_3 = 0$ $a_2 = -2$ $a_1 = 1$ $a_0 = -3$

2) $A(x) = -4x^3 + \sqrt{2}\, x^2 - \frac{3}{4} x + \pi$ és un polinomi

$\text{grad}(A(x)) = 3$

Els coeficients són $a_3 = -4$ $a_2 = \sqrt{2}$ $a_1 = -\frac{3}{4}$ $a_0 = \pi$

3) $B(x) = 5x^4 - \frac{3}{x^2}$ no és un polinomi perquè algunes potències de la variable x són negatives

$B(x) = 5x^4 - 3x^{-2}$

4) $C(x) = 7x^2 - x + \sqrt[3]{x^2}$ no és un polinomi perquè algunes potències de la variable x són racionals

$C(x) = 7x^2 - x + x^{2/3}$

Definició

El valor numéric $P(a)$ del polinomi $P(x)$ en el nombre $a \in \mathbb{R}$ és el nombre que s'obté substituint la variable x per a

Exemple

$P(x) = 4x^3 - 2x + 1$. El valor numèric de $P(x)$ en $x = -1$ és $P(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 2(-1) + 1 = -4 + 2 + 1 = -1$

Definició

Dos polinomis són iguals si tenen els mateixos coeficients.

Exemple

Determinar a i b perquè els polinomis

$A(x) = ax^3 + bx^2 - 1$ i $B(x) = -2x^3 - x^2 + b$ siguin iguals

$$A(x) = B(x) \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ -1 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = -2 \\ b = -1 \end{array}$$

Operacions amb polinomis

* Suma

$A(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$

$B(x) = 5x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 2$

$$A(x) + B(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5 + 5x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 2 = 5x^4 + 5x^3 + 3$$

Nota

$$A(x) - B(x) = A(x) + (-B(x))$$

$$A(x) - B(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5 - (5x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 2) =$$
$$2x^3 - 4x^2 + 5 - 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 2 = -5x^4 - x^3 - 8x^2 + 7$$

Propietats

1) $A(x) + (B(x) + C(x)) = (A(x) + B(x)) + C(x)$ Associativa

2) $A(x) + B(x) = B(x) + A(x)$ Commutativa

3) $A(x) + 0 = A(x)$ Element Neutre

3) $A(x) + (-A(x)) = 0$ Element Simètric

* Producte

$A(x) = 2x^2 + 3x - 2$

$B(x) = -5x^3 + 2x^2$

$$A(x) \cdot B(x) = (2x^2 + 3x - 2) \cdot (-5x^3 + 2x^2) = -10x^5 + 4x^4 - 15x^4 + 6x^3 + 10x^3 - 4x^2 =$$
$$= -10x^5 - 11x^4 + 16x^3 - 4x^2$$

Propietats

1) $A(x)\cdot(B(x)\cdot C(x)) = (A(x)\cdot B(x))\cdot C(x)$ Associativa

2) $A(x)\cdot B(x) = B(x)\cdot A(x)$ Commutativa

3) $A(x)\cdot 1 = A(x)$ Element Neutre

4) $A(x)\cdot(B(x)+C(x)) = A(x)\cdot B(x) + A(x)\cdot C(x)$ Distributiva

Potenciació

$$[A(x)]^n = \overbrace{A(x)\cdot A(x)\cdots\cdots A(x)}^{n \text{ vegades}}$$

$$(x-1)^3 = (x-1)(x-1)\cdot(x-1) = (x^2-2x+1)(x-1) =$$
$$= x^3-2x^2+x-x^2+2x-1 = x^3-3x^2+3x-1$$

Divisió de polinomis

Efectuar la divisió $P(x):D(x)$ consisteix en trobar dos polinomis $Q(x)$ i $R(x)$ que compleixen:

$$P(x) = D(x)\cdot Q(x) + R(x) \quad \text{on} \quad grad(R(x)) < grad(D(x))$$

Exemple

$$\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & & +6x & -4 & 2x^2+x \\ \hline
-8x^3 & -4x^2 & & & 4x-2 \\ \hline
/ & -4x^2 & +6x & & \\
 & 4x^2 & +2x & & \\ \hline
 & / & 8x & -4 &
\end{array}$$

Comprovació:

$$(2x^2+x)\cdot(4x-2)+8x-4 =$$
$$= 8x^3+4x^2-4x^2-2x+8x-4 =$$
$$= 8x^3+6x-4$$

Regla de Ruffini (divisió per $x-a$)

$$
\begin{array}{llll|l}
x^4+2x^3 & & -5x+2 & & x+3 \\
\cline{5-5}
-x^4-3x^3 & & & & x^3-x^2+3x-14 \\
\cline{1-1}
/ \quad -x^3 & & & & \\
\quad x^3+3x^2 & & & & \\
\cline{1-2}
\quad / & 3x^2-5x & & & \\
 & -3x^2-9x & & & \\
\cline{2-3}
 & & -14x+2 & & \\
 & & 14x+42 & & \\
\cline{3-3}
 & & / \quad 44 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & 0 & -5 & 2 \\
-3 & & -3 & 3 & -9 & 42 \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & -14 & \boxed{44}
\end{array}
$$

$x+3 = x-(-3) \Rightarrow a=-3$

Quocient: $x^3-x^2+3x-14$

Residu: 44

Teorema del residu

El residu de la divisió $P(x):x-a$ coincideix amb el valor numeric del polinomi $P(x)$ en $x=a$

Demostració

$$
\begin{array}{l|l}
P(x) & x-a \\
\cline{2-2}
R(x) & Q(x)
\end{array}
$$

$P(x) = (x-a).Q(x) + R(x)$

$grad(R(x)) < 1 \Rightarrow R(x) = r \in \mathbb{R}$

Per tant $P(x) = (x-a).Q(x) + r$

$P(a) = \underbrace{(a-a)}_{0}.Q(a) + r = r$

Exemple

$P(x) = 5x^4 + 3x^3 - x + 2$

$P(-1) = 5 \cdot (-1)^4 + 3(-1)^3 - (-1) + 2 = 5 \cdot 1 - 3 + 1 + 2 = 5$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & & -5 & 2 & -2 & 3 \\ \hline & 5 & -2 & 2 & -3 & \boxed{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 5x^4 & +3x^3 & & -x & +2 & x+1 \\ \cline{6-6} -5x^4 & -5x^3 & & & & 5x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \\ \hline / & -2x^3 & & & & \\ & 2x^3 & +2x^2 & & & \\ \hline & / & 2x^2 & -x & & \\ & & -2x^2 & -2x & & \\ \hline & & / & -3x & +2 & \\ & & & 3x & +3 & \\ \hline & & & / & 5 & \end{array}$$

Definició

a és una arrel de $P(x)$ si $P(a) = 0$

Exemple

3 és una arrel de $P(x) = 2x^2 - 6x$

perquè $P(3) = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 18 - 18 = 0$

Teorema

$P(x)$ es divisible per $x - a$ si i només si $P(a) = 0$

Demostració

Pel teorema del residu $P(x) = (x-a)\,Q(x) + P(a)$

Per tant $P(x) = (x-a) \cdot Q(x) \iff P(a) = 0$

Teorema

Sigui $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

on $a_k \in \mathbb{Z}$ $\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Si $a \in \mathbb{Z}$ és una arrel de $P(x)$ aleshores

a és un divisor de a_0

Demostració

a és arrel de $P(x)$

$\Downarrow$

$0 = P(a) = a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot a^2 + a_1 \cdot a + a_0$

$\Downarrow$

$a_0 = a \cdot (-a_n \cdot a^{n-1} - a_{n-1} \cdot a^{n-2} - \cdots - a_2 \cdot a - a_1) \Rightarrow a$ és divisor de a_0

Factorització de polinomis

$P(x) = x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 4x^2$

$P(x) = (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4) . x^2$

Divisors de -4: ± 1, ± 2 i ± 4

$P(x) = (x-1) . (x^3 - x^2 - 4x - 4) x^2$

$P(x) = (x-1) . (x-1) . (x^2 - 4) x^2$

$P(x) = (x-1)^2 (x-2)(x+2) x^2$

	1	-2	-3	8	-4
1		1	-1	-4	4
	1	-1	-4	4	0
1		1	0	-4	
	1	0	-4	0	
2		2	4		
	1	2	0		

$\boxed{\text{Les arrels de } P(x) \text{ són } 0, 1, 2 \text{ i } -2}$

0 i 1 són arrels dobles, 2 i -2 són arrels simples

Fraccions algèbriques

Una fracció algèbrica es un quocient de polinomis

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

Simplificació de fraccions algèbriques

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1) . (x-3)}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{x-3}{x+2}$$

Factoritzem els polinomis

	1	-4	3
1		1	-3
	1	-3	0

	1	1	-2
1		1	2
	1	2	0

* Suma

$$\frac{2}{x+1} - \frac{4}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x^2-1} =$$

$$= \frac{2}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{2.(x+1)(x-1) - 4(x-1) + x(x+1)}{(x+1)^2.(x-1)} =$$

$$= \frac{2x^2-2-4x+4+x^2+x}{(x+1)^2.(x-1)} =$$

$$= \frac{3x^2-3x+2}{(x+1)^2.(x-1)}$$

* Producte

$$\frac{x^2-4}{x^2-2x+1} \cdot \frac{2x-2}{3x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2} \cdot \frac{2(x-1)}{3(x+2)} = \frac{2(x-2)}{3(x-1)} = \frac{2x-4}{3x-3}$$

* Divisió

$$\frac{x^2-1}{x+2} : \frac{x-1}{2x+4} = \frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \cdot \frac{2(x+2)}{x-1} =$$

$$= \frac{2(x+1)}{1} = 2x+2$$

Binomi de Newton

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}.a + \dots + \binom{n}{i} x^{n-i}.a^i + \dots + \binom{n}{n-1} x.a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n$$

$\binom{n}{i} = C_n^i$ nombres combinatoris

Triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$(x+2)^5 = 1.x^5 + 5.x^4.2 + 10.x^3.2^2 + 10.x^2.2^3 + 5x2^4 + 2^5$$

$$(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$(x-1)^4 = (x+(-1))^4 =$$

$$= 1.x^4 + 4.x^3(-1) + 6x^2(-1)^2 + 4x(-1)^3 + 1.(-1)^4 =$$

$$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$