UNIDAD 1. NUMEROS REALES

Raíces de números racionales

Extraer una raíz es la operación contraria de la potencia

$$\sqrt[n]{A} = B \text{ si } B^n = A$$

El número n se llama í**ndice** de la raíz y el número A se llama **radicando.**

Siempre se cumple la igualdad siguiente;

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a}{b}$$

Ejemplos

1) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{2}{3}$
2) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{2^5}} = -\frac{1}{2}$
3) $\sqrt[3]{-0{,}027} = \sqrt[3]{-\frac{27}{1000}} = \sqrt[3]{-\frac{3^3}{10^3}} = -\frac{3}{10} = -0{,}3$
4) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}} = \pm\frac{4}{5}$
5) $\sqrt{-9}$ no tiene solución porque $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$
6) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \pm\frac{3}{2}$
7) $\sqrt[4]{-\frac{16}{625}}$ no tiene solución porque no hay ningún número que elevado a la cuarta de un número negativo.

Las raíces de **índice impar** siempre se pueden calcular y tienen una única solución.

Las raíces **de índice par de números positivos** tienen dos soluciones de signo contrario.

Las **raíces de índice par de números negativos** no se pueden calcular.

Radicales y potencias de exponente fraccionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplos

1) Expresa el radical en forma de potencia

$\sqrt[7]{5} = 5^{\frac{1}{7}}$ $\quad \sqrt[4]{\left(-\frac{5}{2}\right)^3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ $\quad \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$ $\quad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$

2) Transforma la potencia en radical

$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8}$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{27}{64}}$

$3^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

Operaciones con radicales

Producto y cociente de radicales

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

El producto de raíces es la raíz del producto y el cociente de raíces es la raíz del cociente.

Ejemplos

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{3 \cdot \frac{5}{3}} = \sqrt{5}$ $\quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$

$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}} = \sqrt[3]{3}$ $\quad \sqrt[4]{\frac{2}{3}} : \sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3} : \frac{4}{3}} = \sqrt[4]{\frac{6}{12}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Potencia de un radical

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

Extracción e introducción de factores en un radical

Extracción de factores:

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{-2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^2 \cdot (-3)^3} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[2]{4}.(-3) = -3\sqrt[3]{4}$$

Introducción de factores:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{2^2 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{12}{5}}$$

$$3 \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{243}$$

Suma y resta de radicales

Dos radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando

$p\sqrt[n]{a}$ y $q\sqrt[n]{a}$ son semejantes

Solo se pueden sumar radicales semejantes.

Ejemplos

$\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[5]{5}$

$\frac{1}{4}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \left(\frac{1}{4} + 2 - 1\right)\sqrt{3} = \frac{5}{4}\sqrt{3}$

$5\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + \sqrt{3} = 5\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{3^3} + \sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Racionalización de denominadores con raíces cuadradas

Racionalizar una expresión significa buscar una expresión igual que no tenga raíces en el denominador.

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{3 + \sqrt{5}}{5\sqrt{2}} = \frac{\left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{5 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{10}$

$\frac{5}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{5\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)} = \frac{5\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{5\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}{3}$

$\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)} = \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{4 - 3} = 7 - 4\sqrt{3}$