NOMBRES COMPLEXOS

Introducció

Considero l'equació de 2n grau

$$x^2+2x+2=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.2}}{2.1}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{(-1).4}}{2}=\frac{-2\pm 2.\sqrt{-1}}{2}$$

$$x=-1\pm\sqrt{-1}$$

Anomenem $\boxed{i=\sqrt{-1}}$ aleshores $\boxed{x=\begin{cases}-1+i\\-1-i\end{cases}}$

L'equació té dues solucions complexes

Definicions

1) Els nombres complexos són de la forma $\boxed{a+bi}$ $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$

on $\boxed{i=\sqrt{-1}}$

$\mathbb{C}=\{z=a+bi \mid a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$ és el conjunt dels nombres complexos

2) Els nombres reals a són complexos perquè $a=a+0.i$

3) Els nombres $b.i$ s'anomenen imaginaris purs

4) Sigui $z=a+bi$ $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$

$Re(z)=a$ part real

$Im(z)=b$ part imaginària

Exemples

$Re(4+3i)=4$ part real

$Im(-2-3i)=-3$ part imaginària

Valor absolut

Sigui $z = a + ib$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ valor absolut de z

Exemple

$|-2+3i| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Definició

Si $z = a + ib$ es defineix

$\bar{z} = a - ib$ conjugat de z

Exemple

Si $z = 4+3i$ aleshores $\bar{z} = 4-3i$ conjugat de z

* Suma

$(4-3i) + (-2+6i) = 2+3i$

* Producte

$(-2+3i)\cdot(4+5i) = -8 - 10i + 12i + 15i^2 = -8 + 2i + 15\cdot(-1) =$

$= -8 + 2i - 15 = \boxed{-23+2i}$

Com $\sqrt{-1} = i \iff \boxed{i^2 = -1}$

* Divisió

$$\frac{2+3i}{5+2i} = \frac{(2+3i)\cdot(5-2i)}{(5+2i)\cdot(5-2i)} = \frac{10-4i+15i-6\cdot i^2}{5^2-(2i)^2} =$$

$$= \frac{10+11i-6\cdot(-1)}{25-4i^2} = \frac{10+11i+6}{25-4\cdot(-1)} = \frac{16+11i}{29} = \frac{16}{29} + \frac{11}{29}\cdot i$$

* Potències

$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$

$(2i)^{10} = 2^{10}\cdot i^{10} = 1024\cdot i^{10} = 1024\cdot i^{2+2\cdot 4} = 1024\cdot i^2\cdot (i^4)^2 =$

$= 1024\, i^2 \cdot 1 = 1024\cdot(-1) = \boxed{-1024}$

Binomi de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

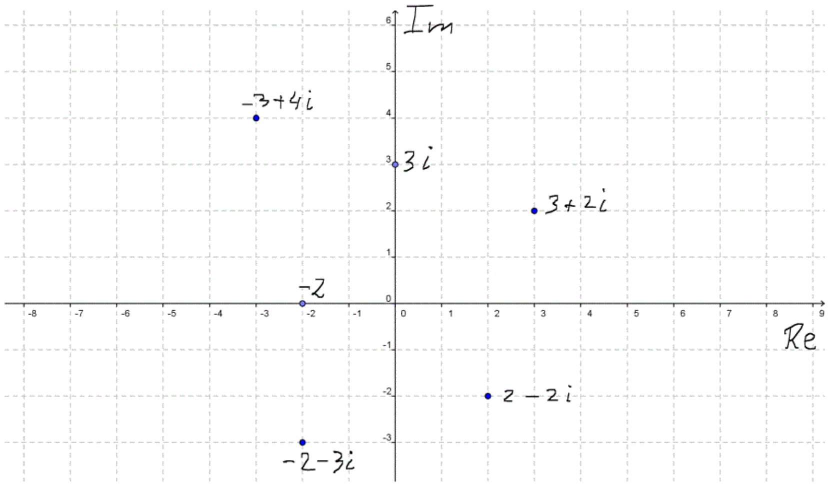
$\binom{n}{i} = C_n^i$ nombres combinatoris

Triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

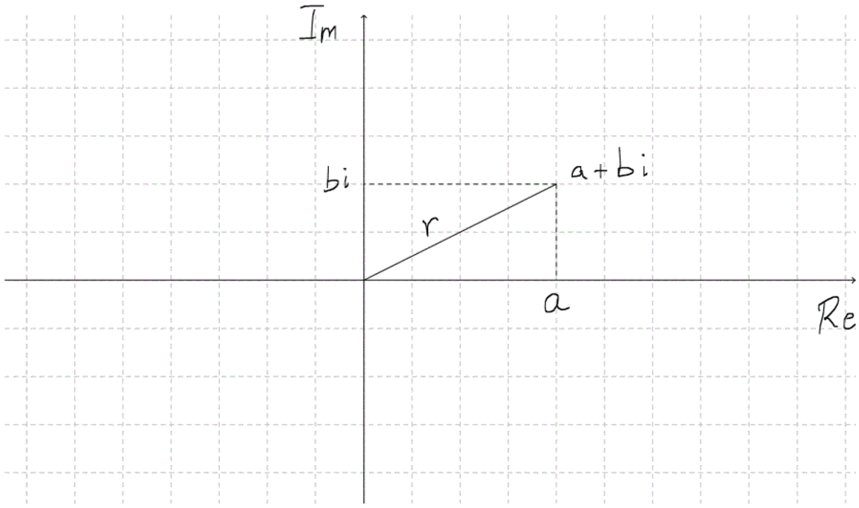
$$(2+3i)^4 = 1 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot (3i) + 6 \cdot 2^2 \cdot (3i)^2 + 4 \cdot 2 \cdot (3i)^3 + 1 \cdot (3i)^4 =$$
$$= 16 + 96i - 216 - 216i + 81 = -119 - 120i$$

Representació gràfica dels nombres complexos



Posem a l'eix "x" la part real i a l'eix "y" la part imaginària

Cada nombre complex és un punt del pla



T. Pitàgores

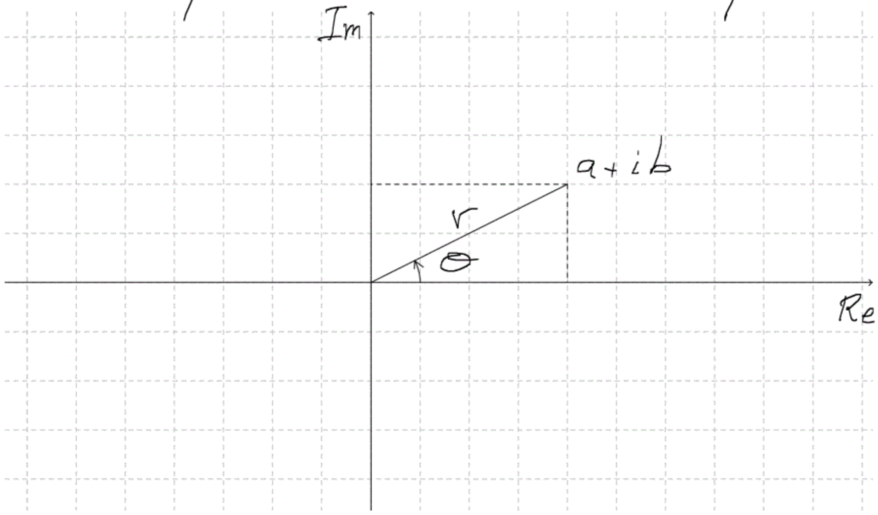
$r^2 = a^2 + b^2$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

Per tant

$\boxed{r = |a+ib|}$

Forma polar d'un nombre complex



r: mòdul

θ: argument

$$\boxed{a+ib = r_\theta}$$

Transformació de forma polar a binòmica

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} \\ \sin\theta &= \frac{b}{r} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= r\cdot\cos\theta \\ b &= r\cdot\sin\theta \end{aligned}}$$

o bé

$$\boxed{a+ib = r\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Transformació de forma binòmica a polar

T. Pitàgores

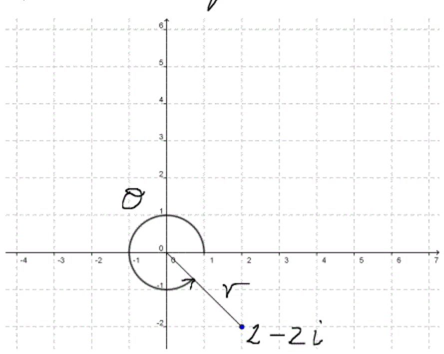
$$r^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow \boxed{r = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \Longrightarrow \boxed{\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Exemples

1) $2_{30^\circ} = 2\cdot(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

2) Transformeu $2-2i$ a forma polar



$r = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{-2}{2}\right) = \operatorname{atan}(-1) = 315^\circ$

$\operatorname{atan}(1) = 45^\circ$

Com θ està al 4t quadrant

$\theta = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

Per tant $2-2i = (\sqrt{8})_{315^\circ}$

Teorema

1) $r_\theta \cdot s_\alpha = (r.s)_{\theta+\alpha}$ 3) $(r_\theta)^n = (r^n)_{n.\theta}$

2) $\dfrac{r_\theta}{s_\alpha} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\theta-\alpha}$

Demostració

1) $r_\theta \cdot s_\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) . s(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$
$= r.s(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha + i(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta.\cos\alpha) =$
$= r.s(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)) = (r.s)_{\theta+\alpha}$

2) $\dfrac{r_\theta}{s_\alpha} = t_\gamma \Longrightarrow r_\theta = t_\gamma \cdot s_\alpha = (t.s)_{\gamma+\alpha} \Longrightarrow \begin{matrix} t.s = r \\ \gamma+\alpha = \theta \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} t = \frac{r}{s} \\ \gamma = \theta - \alpha \end{matrix}$

3) $(r_\theta)^n = r_\theta \cdot r_\theta \overset{n \text{ vegades})}{\text{-----------}} r_\theta = (r.r \overset{n)}{--} r)_{\theta+\theta+ \overset{n)}{--} +\theta} =$
$= (r^n)_{n.\theta}$

Fòrmula de Moivre

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Demostració

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (1_\theta)^n = (1^n)_{n\theta} = 1_{n\theta} =$
$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Exemples

1) Calculeu

$$2_{120^\circ} \cdot 3_{30^\circ} = (2.3)_{120^\circ+30^\circ} = 6_{150^\circ}$$

2) Calculeu $\dfrac{8_{210^\circ}}{4_{30^\circ}} = \left(\dfrac{8}{4}\right)_{210^\circ-30^\circ} = 2_{180^\circ} = -2$

3) Calculeu

$$(1_{30^\circ})^{12} = (1^{12})_{12.30^\circ} = 1_{360^\circ} = 1$$

4) Calculeu $\sqrt[3]{-8}$

$$-8 = 8_{180°} \Longrightarrow r_\theta = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180°}}$$

$$8_{180°} = (r_\theta)^3 = (r^3)_{3\theta}$$

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = 180° + k \cdot 360° \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = \dfrac{180°}{3} + k \cdot \dfrac{360°}{3} = 60° + k \cdot 120° \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\theta = \begin{cases} 60° & k=0 \\ 180° & k=1 \\ 300° & k=2 \end{cases} \Longrightarrow r_\theta = \begin{cases} 2_{60°} = 1 + i\sqrt{3} \\ 2_{180°} = -2 \\ 2_{300°} = 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$