FUNCIÓ EXPONENCIAL I LOGARÍTMICA

Funció Exponencial

Sigui $a>0$ $a \neq 1$

La funció $f(x)=a^x$ s'anomena funció exponencial de base a. El seu domini es $\mathbb{R}$.

Nota

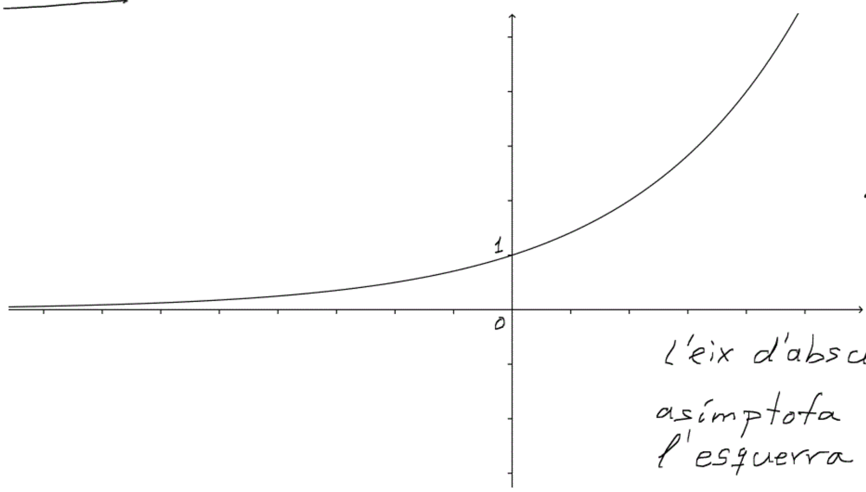
La funció $f(x)=e^x$ s'anomena funció exponencial

$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ és un nombre irracional

$e \simeq 2,7182818\ 846\ldots$

Gràfiques

1r cas/ $1<a$

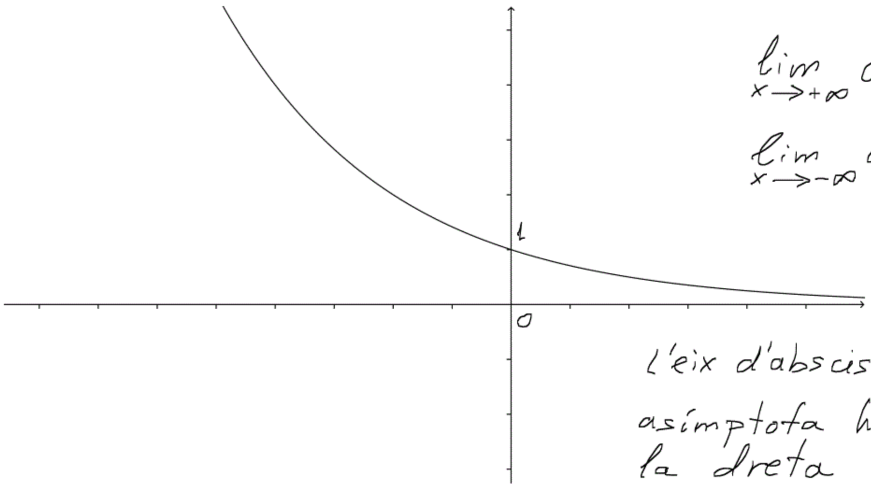


$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

l'eix d'abscisses és una asímptota horitzontal per l'esquerra

2n cas $0 < a < 1$



$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

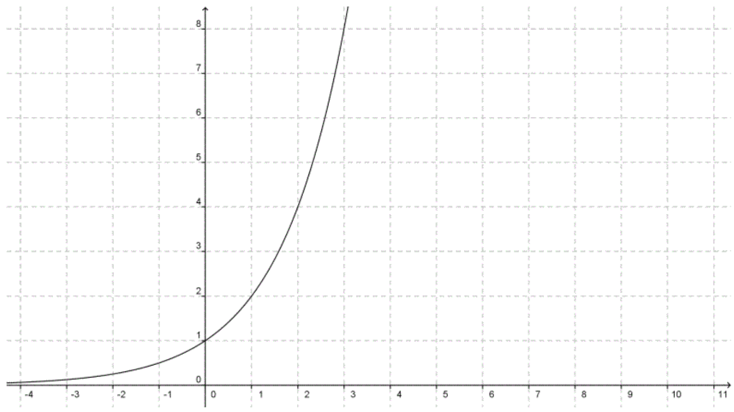
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

l'eix d'abscisses és una asímptota horitzontal per la dreta

Exemple

$f(x) = 2^x$ $\quad$ $Dom f = \mathbb{R}$

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3
y	1	2	4	8	16	0,5	0,25	0,125



$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$$

l'eix d'abscisses és una asímptota horitzontal per l'esquerra

Logaritmes

Definició

Sigui $a>0$ i $a\neq 1$

Direm que x és el logaritme en base a de N si es verifica $N=a^x$

$$\boxed{x=\log_a(N) \Longleftrightarrow N=a^x}$$

Nota

1) $\log(N)=\log_{10}(N)$ logaritme decimal
2) $\ln(N)=\log_e(N)$ logaritme neperià

Exemples

1) Calculeu $\log_2(16)$

$$x=\log_2(16) \Longleftrightarrow 2^x=16=2^4 \Longleftrightarrow x=4$$

Per tant, $\log_2(16)=4$

2) Calculeu $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

$$x=\log_3\left(\frac{1}{27}\right) \Longleftrightarrow 3^x=\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}=3^{-3} \Longleftrightarrow x=-3$$

Per tant, $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)=-3$

3) Calculeu $\log_5\left(\frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)$

$$x=\log_5\left(\frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right) \Longleftrightarrow 5^x=\frac{1}{\sqrt[3]{25}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{5^{2/3}}=5^{-2/3} \Longleftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$

Per tant $\log_5\left(\frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)=-\frac{2}{3}$

4) Calculeu $\log\sqrt{0,1}$

$$x=\log\sqrt{0,1} \Longleftrightarrow 10^x=\sqrt{0,1}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\sqrt{10^{-1}}=10^{-1/2} \Longleftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

5) Calculeu $\ln(e^{-4})$

$$x=\ln(e^{-4}) \Longleftrightarrow e^x=e^{-4} \Longleftrightarrow x=-4$$

Propietats

1) $\log_a(N.M) = \log_a(N) + \log_a(M)$

2) $\log_a\left(\frac{N}{M}\right) = \log_a(N) - \log_a(M)$

3) $\log_a(N^M) = M.\log_a(N)$

4) $\log_a(\sqrt[M]{N}) = \frac{1}{M}\cdot\log_a(N)$

Demostració

1) $\left.\begin{array}{l} z = \log_a(N.M) \\ x = \log_a(N) \\ y = \log_a(M) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a^z = N.M = a^x.a^y = a^{x+y} \Longrightarrow z = x+y \\ a^x = N \\ a^y = M \end{array}$

2) $\left.\begin{array}{l} z = \log_a\left(\frac{N}{M}\right) \\ x = \log_a(N) \\ y = \log_a(M) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a^z = \frac{N}{M} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Longrightarrow z = x-y \\ a^x = N \\ a^y = M \end{array}$

3) $\left.\begin{array}{l} y = \log_a(N^M) \\ x = \log_a(N) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a^y = N^M = (a^x)^M = a^{Mx} \Longrightarrow y = M.x \\ a^x = N \end{array}$

4) $\log_a(\sqrt[M]{N}) = \log_a(N^{1/M}) = \frac{1}{M}\cdot\log_a(N)$

Exemple

Calculeu $\log\left(\frac{100}{\sqrt{0,4}}\right)$ sabent que $\log 2 = 0,30103$

$\log\left(\frac{100}{\sqrt{0,4}}\right) \underset{2)}{=} \log(100) - \log\sqrt{0,4} \underset{4)}{=} \log 10^2 - \frac{1}{2}\cdot\log 0,4 =$

$= 2 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{10}\right) \underset{2)}{=} 2 - \frac{1}{2}(\log 4 - \log 10) = 2 - \frac{1}{2}(\log 2^2 - 1) =$

$\underset{3)}{=} 2 - \frac{1}{2}(2\log 2 - 1) = 2 - \log 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \log 2 =$

$= \frac{5}{2} - 0,30103 = 2,5 - 0,30103 = 2,19897$

Canvi de base

$$\log_a(N) = \frac{\log_b(N)}{\log_b(a)}$$

Demostració

$$\left.\begin{aligned} z &= \log_a(N) \\ x &= \log_b(N) \\ y &= \log_b(a) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} N &= a^z \\ b^x &= N \\ b^y &= a \end{aligned} \Longrightarrow b^x = \left(b^y\right)^z = b^{y \cdot z} \Rightarrow x = y \cdot z \Rightarrow z = \frac{x}{y}$$

Exemple

1) Calculeu $\log_3(2,9)$

$$\log_3(2,9) = \frac{\log_{10}(2,9)}{\log_{10}(3)} = \frac{0,462398}{0,4771212} = 0,9691416$$

Canvi a base decimal

2) Calculeu $\log_5(4,6)$

$$\log_5(4,6) = \frac{\log_e(4,6)}{\log_e(5)} = \frac{\ln(4,6)}{\ln(5)} = \frac{1,5260563}{1,6094379} = 0,9481921$$

Canvi a base el nombre e

Funció logarítmica

Sigui $a > 0$, $a \neq 1$

La funció $f(x) = \log_a(x)$ s'anomena funció logarítmica de base a.

Només està definida als nombres reals positius perquè és la funció inversa de la funció exponencial de base a.

$\mathrm{Dom}\, f = (0, +\infty)$

Nota

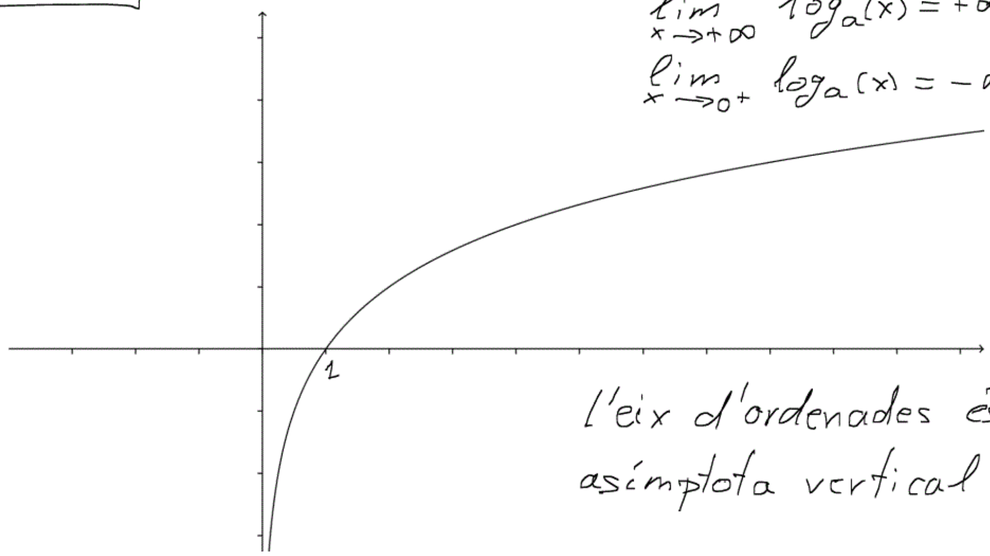
La funció $f(x) = \ln(x)$ s'anomena funció logaritme neperià

Gràfiques

1r cas/ $1 < a$

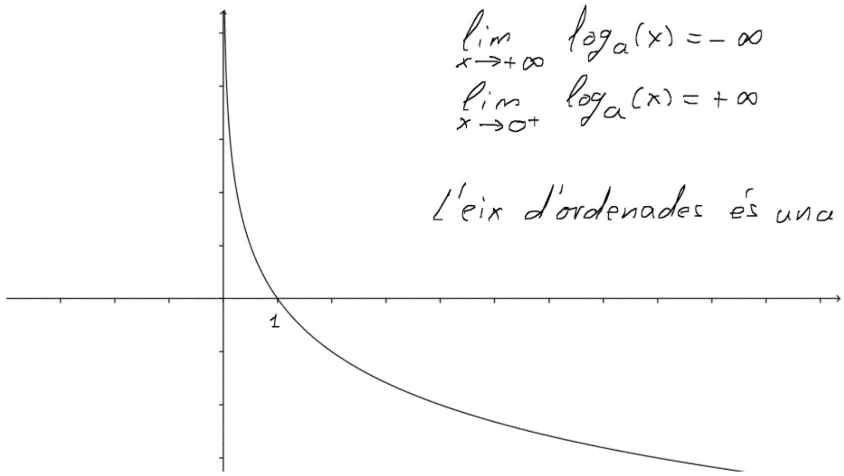
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$$



l'eix d'ordenades és una asímptota vertical

2n cas/ $0<a<1$



$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$$

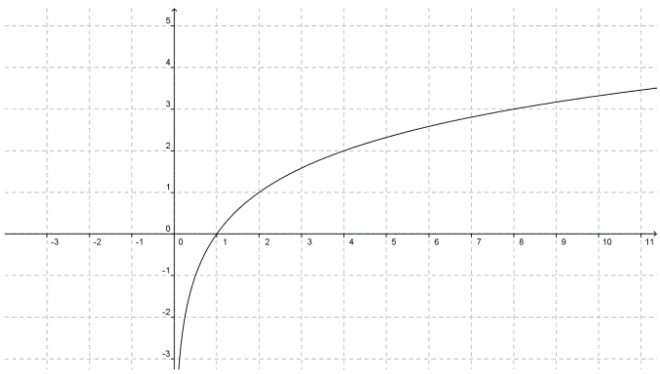
L'eix d'ordenades és una asímptota vertical

Exemple

$f(x) = \log_2(x)$ Dom $f = (0, +\infty)$

$y = \log_2(x) \Longleftrightarrow x = 2^y$

y	0	1	2	3	4	-1	-2	-3
x	1	2	4	8	16	0,5	0,25	0,125



$$\lim_{x \to +\infty} \log_2(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \log_2(x) = -\infty$$

L'eix d'ordenades és una asímptota vertical