UNIDAD 4. INTRODUCCION AL ALGEBRA

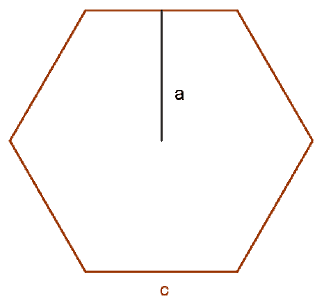
El Algebra: Las letras representan números

1) Expresa mediante letras el perímetro P y el área A de las figuras siguientes

a) Un hexágono regular de lado c y apotema a

$$P = 6 \cdot c$$

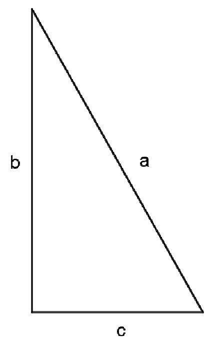
$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$



b) Un triangulo rectángulo de hipotenusa a , y catetos b y c

$$P = a + b + c$$

$$A = \frac{c \cdot b}{2}$$



2) Expresa utilizando letras y números los enunciados siguientes:

a) El precio p en euros de n kilogramos de manzanas a $1'6$ €$/kg$.

$$p = 1'6 \cdot n$$

b) La distancia d en kilómetros que recorre, durante t horas, un coche que se mueve a velocidad constante de $60\,km/h$.

$$d = 60 \cdot t$$

Expresiones algebraicas. Valor numérico de una expresión algebraica

Ana, Pedro, Maite y Antonio almacenan canciones de iTunes en sus ordenadores. Pedro tiene 100 canciones menos que Ana, Maite tiene el doble de canciones que Pedro y Antonio 200 canciones más que Maite.

Como no sabemos cuántas canciones tiene Ana, representamos con una letra este número.

$$\text{Ana} \rightarrow n$$

Pedro tiene 100 canciones menos

$$\text{Pedro} \rightarrow n-100$$

Maite tiene el doble de canciones que Pedro

$$\text{Maite} \rightarrow 2\cdot(n-100)$$

Antonio tiene 200 canciones más que Maite

$$\text{Antonio} \rightarrow 2\cdot(n-100)+200$$

Si conocemos los números que representan las letras, una expresión algebraica puede dejar de serlo y transformarse en un **valor numérico.** Solo hay que substituir las letras por los números que representan y realizar las operaciones.

Si Ana tiene 500 canciones almacenadas en su ordenador

$$n=500$$

Pedro tiene

$$500-100=400$$

Maite tiene

$$2\cdot(500-100)=800$$

Antonio tiene

$$2\cdot(500-100)+200=1000$$

Términos y coeficientes de una expresión algebraica

Un **término** es cada uno de los sumandos de una expresión algebraica

La expresión algebraica $2x^2 + xy - y^3$ tiene tres términos $2x^2$, xy y $-y^3$

La expresión algebraica $3n^2 - 5p^2$ tiene dos términos $3n^2$ y $-5p^2$

La expresión algebraica $7c + 5$ tiene dos términos $7c$ y 5

La expresión algebraica $8c$ sólo tiene un término

Cada uno de los términos de una expresión algebraica consta de un número que se llama **coeficiente** y una parte con letras que se llama **parte literal**.

Considero la expresión algebraica $p^2 - 4pq - 5q^2$

p^2 es un término de coeficiente 1 y parte literal p^2

$-4pq$ es un término de coeficiente -4 y parte literal pq

$-5q^2$ es un término de coeficiente -5 y parte literal q^2

Los términos que tienen la misma parte literal se llaman **semejantes**

Los términos $-5x$, $3x$ y x son semejantes

Los términos bc, $4bc$ y $-5bc$ son semejantes

Operaciones con expresiones algebraicas

** Suma y resta*

Una funda de tableta digital vale x €, los auriculares y el lápiz valen 5 € más, y la tableta vale 10 veces más que la funda. ¿Cuál es la expresión algebraica que da el importe total de todo el equipo de la tableta?

Precio de la funda de la tableta $\rightarrow x$

Precio de los auriculares y el lápiz $\rightarrow x+5$

Precio de la tableta $\rightarrow 10\,x$

Importe total

$$x+x+5+10x = x+x+10x+5 = (1+1+10)x+5 = 12x+5$$

** Multiplicación*

Multiplicación de un número por una expresión algebraica

$$3\cdot 4x = 12x$$
$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}x = \frac{3}{10}x$$
$$2(3y-4) = 6y-8$$
$$2(a^2-b^2+3c^2) = 2a^2-2b^2+6c^2$$

Multiplicación de dos expresiones algebraicas con un solo término

$$3x\cdot 5x = 15x^2$$

Multiplicación de expresiones algebraicas con dos términos cada una

$$(x+y)\cdot(x+2y) = x^2+2xy+yx+2y^2 = x^2+3xy+2y^2$$

Igualdades, identidades y ecuaciones

Considero la expresión en la que aparece el signo igual

$$210 + 4'5 \cdot 20 = 300$$

Es una **igualdad numérica**. Se identifican dos **miembros** separados por el signo igual.

$$1^{er} \text{ miembro } \rightarrow 210 + 4'5 \cdot 2$$
$$2^{o} \text{ miembro } \rightarrow 300$$

Expresamos en forma de igualdad que la suma de los cuadrados de dos números es 13

$$x^2 + y^2 = 13$$

Es una **igualdad algebraica**.

Considero la igualdad algebraica

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

Queremos saber que valores la cumplen. Substituimos por $x = 0$, $x = 2$ y $x = \frac{2}{5}$

Valor numérico de la letra x	Valor numérico del 1^er miembro $(x+1)(x-1)$	Valor numérico del 2º miembro $x^2 - 1$
0	$(0+1)(0-1) = 1 \cdot (-1) = -1$	$0^2 - 1 = -1$
2	$(2+1)(2-1) = 3 \cdot 1 = 3$	$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}+1\right) \cdot \left(\frac{2}{5}-1\right) = \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{21}{25}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = \frac{4}{25} - 1 = -\frac{21}{25}$

Observamos que la igualdad se cumple para todos los valores de x.

Multipliquemos

$$(x+1)(x-1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$$

Observamos que la igualdad se cumple siempre. Diremos que es una **identidad**

Una **identidad** es una igualdad algebraica que se cumple para cualquier valor numérico que se asigne a las letras que aparecen en sus miembros.

Considero la igualdad algebraica

$$3x - 12 = 0$$

Esta igualdad algebraica sólo la cumple el valor $x = 4$, no encontraremos otro valor que la verifique. Diremos que es una **ecuación**.

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que sólo se cumple para determinados valores de las letras que aparecen en sus miembros.

Identidades Notables

* *Cuadrado de la suma de dos términos* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

* *Cuadrado de la diferencia de dos términos* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

* *Suma de dos términos multiplicada por su diferencia* $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Ejemplo

Calcula:

a) $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $(4-2y)^2 = 4^2 - 2\cdot 4\cdot 2y + (2y)^2 = 16 - 16y + 4y^2$

c) $(3+5z)\cdot(3-5z) = 3^2 - (5z)^2 = 9 - 25z^2$

1) pág. 90

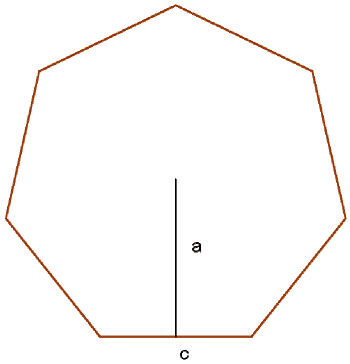
a) $\frac{4}{5} \cdot x$

b) $x^2 + y^2$

c) $(x+y)^2$

d) Heptágono regular de lado $4cm$

$A: Area$
$P: Perímetro$
$c: lado$
$a: apotema$



$c = 4$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{7 \cdot c \cdot a}{2} = \frac{7 \cdot 4 \cdot a}{2} = \frac{28a}{2} = 14a$$

e) $(x+y) \cdot (x-y)$

2) pág. 90

a) $6n - 10$ Seis veces un número menos diez

b) $3x^3$ Tres veces el cubo de un número

c) $5pq$ Cinco veces el producto de dos números

d) $(x-y)^2$ El cuadrado de la diferencia de dos números

e) $(2x)^2$ El cuadrado del doble de un número

f) $(cd)^3$ El cubo del producto de dos números