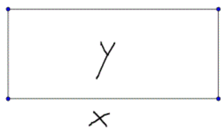
FUNCIONS

Introducció

a) Podem definir una funció mitjançant un enunciat:
Considero la funció que asigna a la base "x" d'un rectangle de perímetre 12cm la seva àrea "y"



x : base
y : àrea

Perímetre = 12cm

b) Una taula de valors

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	5	8	9	8	5	0

Sigui h: altura

$2x+2h=12 \Rightarrow 2h=12-2x \Rightarrow h=\frac{12-2x}{2} \Rightarrow \boxed{h=6-x}$

Si $x=0 \Rightarrow h=6-0=6 \Rightarrow y=0.6=0$

Si $x=1 \Rightarrow h=6-1=5 \Rightarrow y=1.5=5$

Si $x=2 \Rightarrow h=6-2=4 \Rightarrow y=2.4=8$

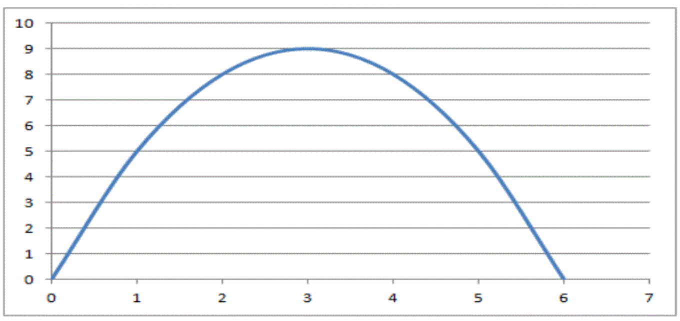
Si $x=3 \Rightarrow h=6-3=3 \Rightarrow y=3.3=9$

Si $x=4 \Rightarrow h=6-4=2 \Rightarrow y=4.2=8$

Si $x=5 \Rightarrow h=6-5=1 \Rightarrow y=5.1=5$

Si $x=6 \Rightarrow h=6-6=0 \Rightarrow y=6.0=0$

c) Un gràfic



x: eix d'abscisses
y: eix d'ordenades

d) Una fórmula

Àrea = base . altura

$y=x.h \Rightarrow \boxed{y=x.(6-x)}$ $\quad 0 \le x \le 6$

Definició

Una funció real de variable real és una correspondència f que assigna a cada nombre x d'un conjunt D, anomenat domini, un únic nombre real $f(x)$.

Exemples

1)
$$[0,6] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x\cdot(6-x)$$

2)
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

3) En el primer exemple tenim que

$f(3)=9$ "la imatge de 3 és 9"

$f(2)=8$ "la imatge de 2 és 8"

$f(4)=8$ "la imatge de 4 és 8"

També direm que

$f^{-1}(9)=3$ "la antiimatge de 9 és 3"

$f^{-1}(8)= \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ "Les antiimatges de 8 són 2 i 4"

Definicions

1) $\mathrm{Dom} f = \{x\in\mathbb{R} \mid \text{existeix } f(x)\}$ domini de f

2) $\mathrm{Im} f = \{y\in\mathbb{R} \mid \text{existeix } f^{-1}(y)\}$ recorregut de f

Exemples

1) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-2x}$

$x\notin \mathrm{Dom} f \iff x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\boxed{x=0}$ $\quad x-2=0$

$\boxed{x=2}$

$$\boxed{\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}-\{0,2\}}$$

La funció f està definida a tots els nombres reals excepte 0 i 2

2) $f(x) = \sqrt{10-2x}$

$x \in \text{Dom} f \iff 0 \leq 10-2x$

$2x \leq 10$

$x \leq \frac{10}{2}$

$x \leq 5$

$\boxed{\text{Dom} f = (-\infty, 5]}$ La funció està definida als nombres més petits o iguals que 5

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-2x}}$

$x \in \text{Dom} f \iff 0 < 4-2x$

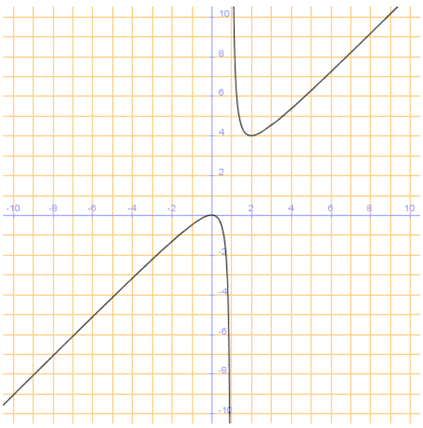
$-4 < -2x$

$\frac{-4}{-2} > x$

$2 > x$

$\boxed{\text{Dom} f = (-\infty, 2)}$ La funció està definida als nombres més petits que 2.

4) Considero la funció f que té el gràfic següent:



$\boxed{\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}}$ Domini

La funció no està definida a 1 perque hi ha una asímptota vertical a $x = 1$

$\boxed{\text{Im} f = \mathbb{R} - (0,4)}$ Recorregut

Els nombres compresos entre 0 i 4 no tenen antiimatge.

Funció composta

Considero les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es defineix la funció composta de g i f com a

$$\boxed{(f\circ g)(x) = f(g(x))}$$

Exemples

1) Siguin $g(x) = x^2$ i $f(x) = x+1$

$$\boxed{(f\circ g)(x) = x^2+1}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
3 & \longmapsto & 9 & \longmapsto & 10 \\
x & \longmapsto & x^2 & \longmapsto & x^2+1
\end{array}$$

2) Siguin $g(x) = 2x-1$ i $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = \sqrt{(2x-1)^2+2} = \sqrt{4x^2-4x+1+2}$$

$$\boxed{(f\circ g)(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2+2}) = 2\sqrt{x^2+2} - 1$$

$$\boxed{(g\circ f)(x) = 2\sqrt{x^2+2} - 1}$$

S'observa que $f\circ g$ i $g\circ f$ en general no són iguals

Funció Inversa

Definició

Una funció $f(x)$ és injectiva si cada $y \in \mathrm{Im}f$ només té una antiimatge $f^{-1}(y)$

Definició

Considero una funció $f(x)$ injectiva

La funció inversa $f^{-1}(x)$ assigna a cada $x \in \mathrm{Im}f$ la seva antiimatge $f^{-1}(x)$

Exemples

1) $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$

$y = \frac{2x-1}{2x+1}$

Aïllem x

$(2x+1)y = 2x-1$

$2xy + y = 2x-1$

$2xy - 2x = -y-1$

$x(2y-2) = -y-1$

$x = \frac{-y-1}{2y-2}$

Per tant

$f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2x-2}$

2) $f(x) = x^3 + 8$

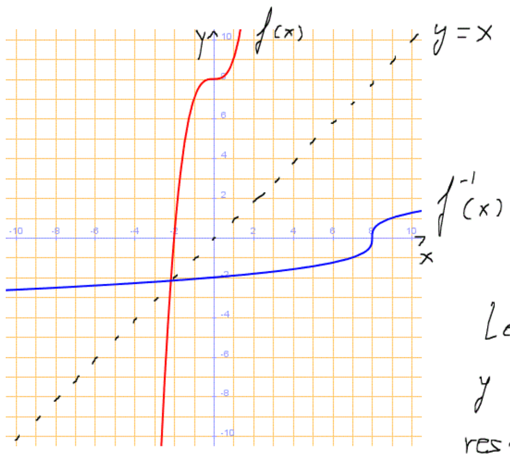
x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-19	0	7	8	9	16

$y = x^3 + 8 \Rightarrow y - 8 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-8}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8}$

x	-19	0	7	8	9	16
$f^{-1}(x)$	-3	-2	-1	0	1	2

Representem al mateix gràfic les dues taules



Les gràfiques de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ són simètriques respecte la recta $y=x$