

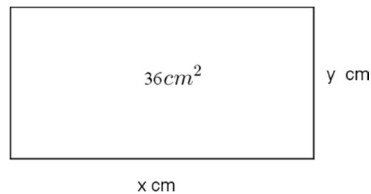
## Unidad 8. ESTUDIO GENERAL DE UNA FUNCION

### Introducción

Una función la podemos definir de diversas maneras:

#### Un texto

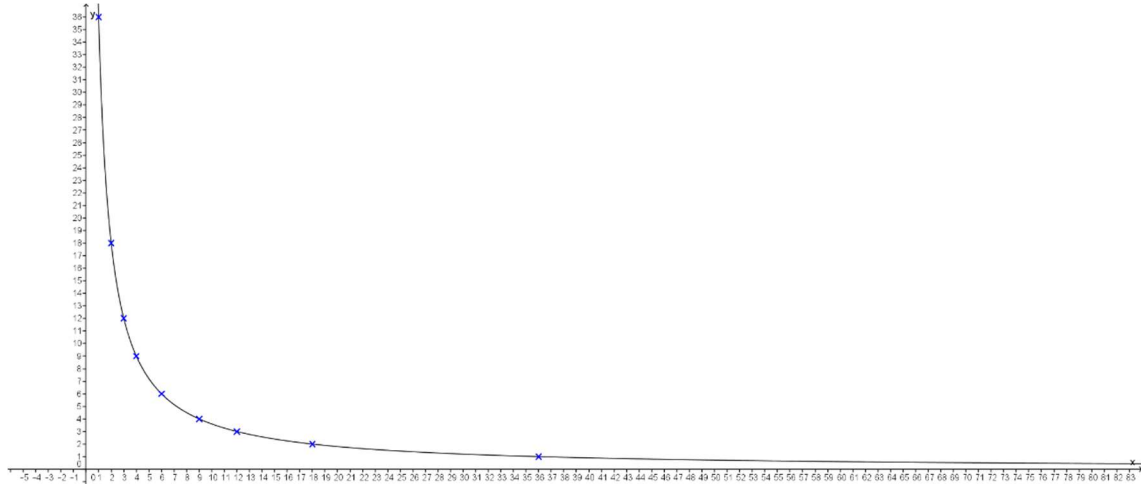
Considero la función que asigna a la base  $x$  cm de un rectángulo de área  $36 \text{ cm}^2$  su altura  $y$  cm



#### Una tabla de valores

$x$ cm	1	2	3	4	6	9	12	18	36
$y$ cm	36	18	12	9	6	4	3	2	1

#### Una gráfica



#### Una expresión algebraica

$$x \cdot y = 36$$

$$y = \frac{36}{x}$$

Si designamos esta función con la letra  $f$  entonces  $x \xrightarrow{f} y = f(x)$

$$\text{Podemos escribir } f(x) = \frac{36}{x}$$

Esta función solo se puede aplicar para  $0 < x$  porque la base de un rectángulo es una medida positiva que no puede ser cero. Diremos que el **dominio** de esta función es el intervalo:

$$D = (0, +\infty)$$

## Dominio y recorrido

Una **función**  $f$  es una correspondencia que asigna a cada número  $x \in D$ , **dominio**, una única imagen  $f(x)$

### Ejemplos

1)  $f(x) = x^2$                        $D = \mathbb{R}$  dominio

$f(2) = 4$                       La imagen de 2 es 4

$f(-2) = 4$                       La imagen de -2 es 4

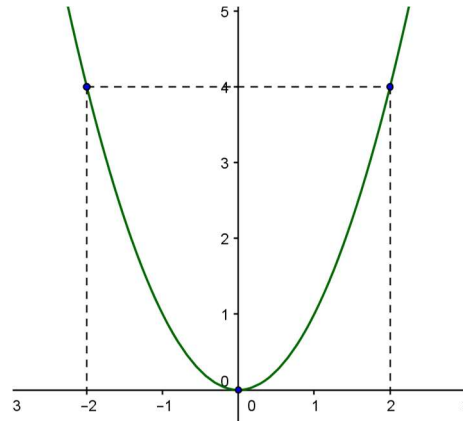
$f(0) = 0$                       La imagen de 0 es 0

Las antiimágenes de 4 son 2 y -2

$$f^{-1}(4) = \begin{matrix} \nearrow & 2 \\ \searrow & -2 \end{matrix}$$

La antiimagen de 0 es 0

$$f^{-1}(0) = 0$$



2) Considera la función  $f(x) = x^2 - x$ . Encuentra la imagen de -3 y las antiimágenes de 6

$f(-3) = (-3)^2 - (-3) = 9 + 3 = 12$                       La imagen de -3 es 12

$f(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 - x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow & 3 \\ \searrow & -2 \end{matrix}$$

Las antiimágenes de 6 son 3 y -2                       $f^{-1}(6) = \begin{matrix} \nearrow & 3 \\ \searrow & -2 \end{matrix}$

El **dominio**  $D$  de una función  $f$  es el conjunto de los números  $x$  que tienen imagen  $f(x)$

El **recorrido**  $I$  de una función  $f$  es el conjunto de los números  $y$  que tienen antiimagen  $f^{-1}(y)$

El dominio de la función  $f(x) = x^2$  es  $D = \mathbb{R}$  y el recorrido es  $I = (0, +\infty)$

### Ejemplo

Encuentra el dominio  $D$  de las siguientes funciones

a)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$x \notin D \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$D = \mathbb{R} - \{2\}$

b)  $f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x}$

$x \notin D \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ó } x = 0$

$D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

c)  $f(x) = \sqrt{x-4}$

$x \in D \Leftrightarrow 0 \leq x - 4 \Leftrightarrow 4 \leq x$

$D = [4, +\infty)$

d)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$

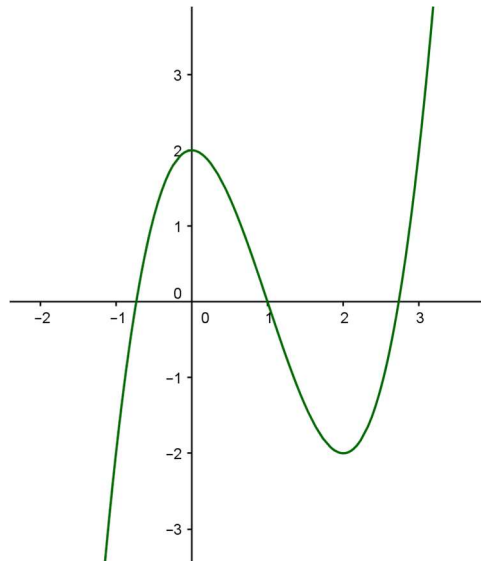
$x \in D \Leftrightarrow 0 < x + 3 \Leftrightarrow -3 < x$

$D = (-3, +\infty)$

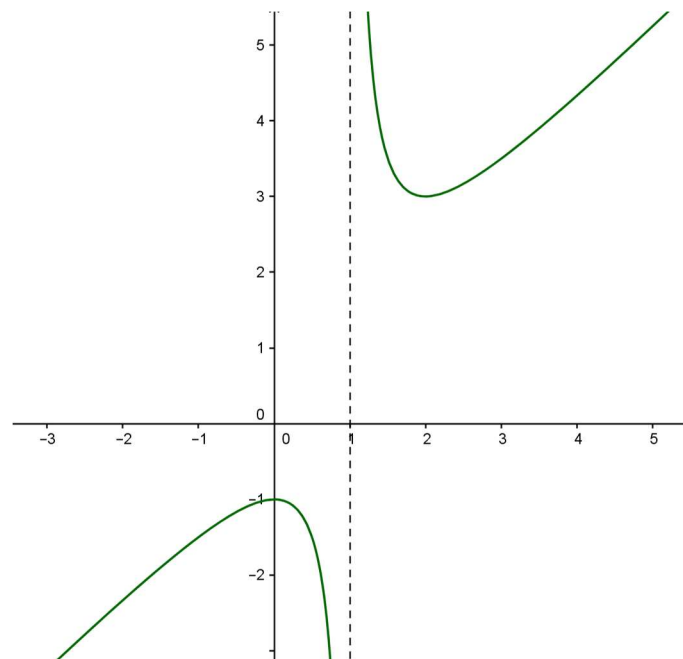
## Características de la gráfica de una función

### Continuidad

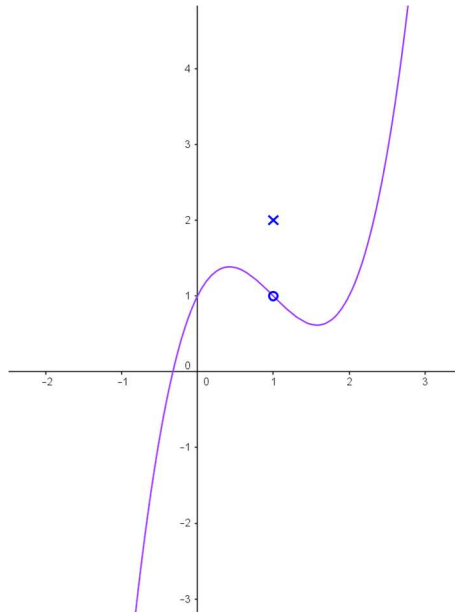
Una función es **continua** si se puede dibujar su gráfica con un único trazo.



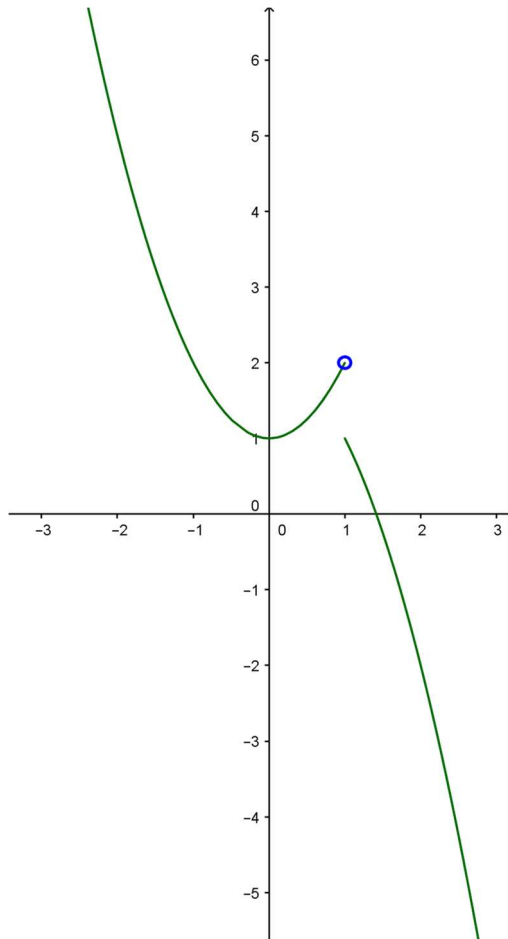
Si la función no es continua en un punto diremos que tiene una **discontinuidad** en este punto.



Función con una **discontinuidad asintótica** en el punto  $x = 1$

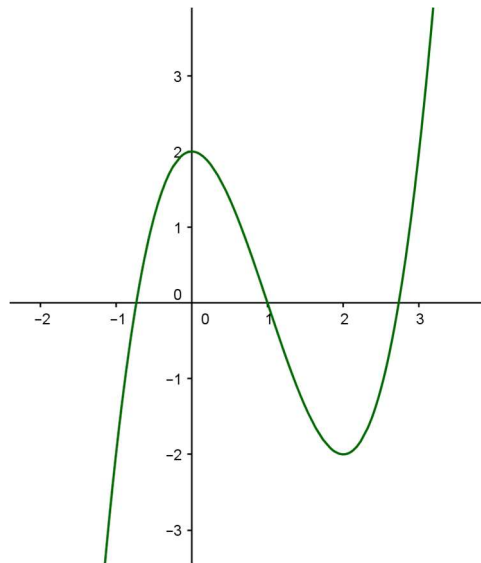


Función con una **discontinuidad evitable** en el punto  $x = 1$



Función con una **discontinuidad de salto** en el punto  $x = 1$

### Puntos de corte con los ejes



El punto de corte con el eje "y" se obtiene calculando  $f(0)$ , y los puntos de corte con el eje "x" resolviendo la ecuación  $f(x) = 0$ .

#### Ejemplo

Encuentra los puntos de corte con los ejes de la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Eje "y":  $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$

Eje "x":  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 - 2x - 2) = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x = 1 \quad x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{matrix} \nearrow & 2'73 \\ \searrow & -0'73 \end{matrix}$$

La función corta el eje "x" en los puntos  $-0'73, 1$  y  $2'73$

#### Signo

Encuentra los intervalos donde la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  tiene signo positivo y signo negativo.

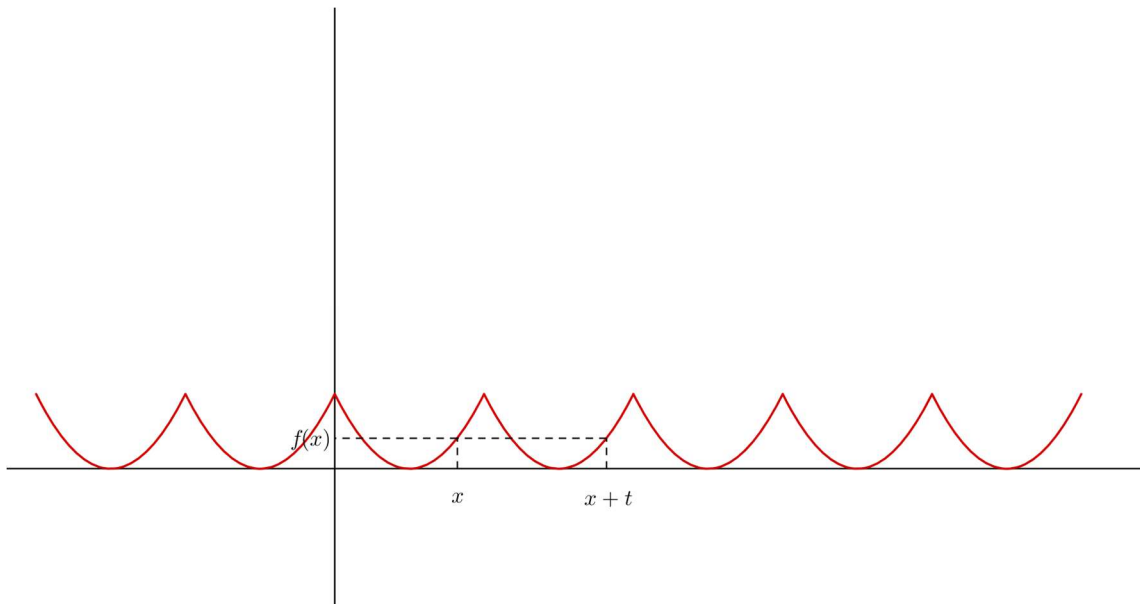
Los puntos de corte con el eje "x" son  $-0'73, 1$  y  $2'73$ , los cuales dividen la recta real en 4 intervalos.

$x$	$(-\infty, -0'73)$	$(-0'73, 1)$	$(1, 2'73)$	$(2'73, +\infty)$
$f(x)$	-	+	-	+
	$f(-1) = -2$	$f(0) = 2$	$f(2) = -2$	$f(3) = 2$

La gráfica de  $f(x)$  está debajo del eje "x" en los intervalos  $(-\infty, -0'73)$  y  $(1, 2'73)$

La gráfica de  $f(x)$  está encima del eje "x" en los intervalos  $(-0'73, 1)$  y  $(2'73, +\infty)$

## Periodicidad



Una función  $f(x)$  es **periódica** de periodo  $t$  si se cumple  $f(x+t) = f(x)$ . La gráfica de la función se repite si se traslada  $t$  unidades.

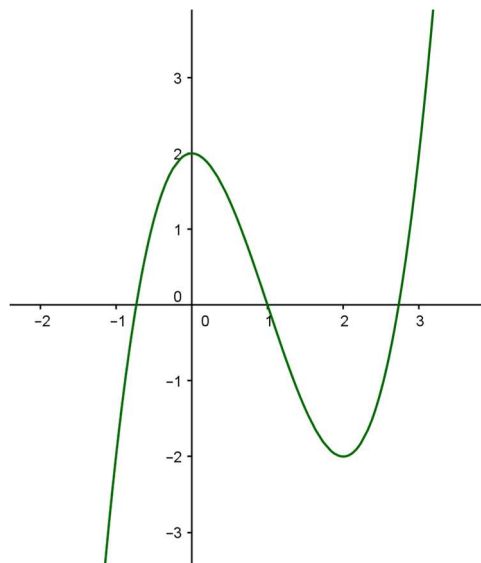
## Crecimiento

Una función es **creciente** en el intervalo  $I$  si se cumple:

$$x, x' \in I \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

Una función es **decreciente** en el intervalo  $I$  si se cumple:

$$x, x' \in I \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$$



La función es creciente en los intervalos  $(-\infty, 0)$  y  $(2, +\infty)$

La función es decreciente en el intervalo  $(0, 2)$

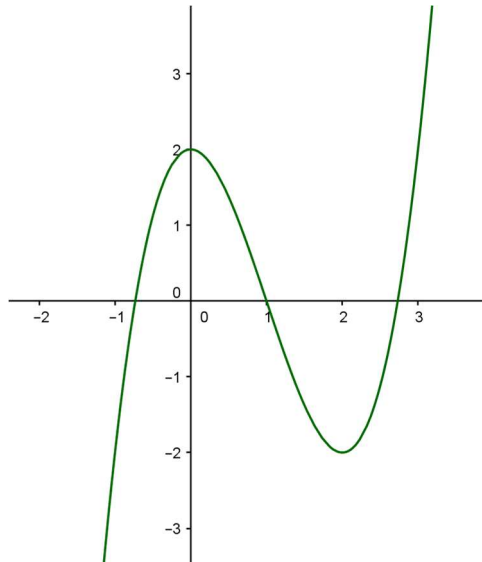
## Extremos

Una función tiene un **máximo relativo** en  $a$  si en un entorno  $I$  del punto  $a$  se cumple:

$$x \in I \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

Una función tiene un **mínimo relativo** en  $a$  si en un entorno  $I$  del punto  $a$  se cumple:

$$x \in I \Rightarrow f(a) \leq f(x)$$

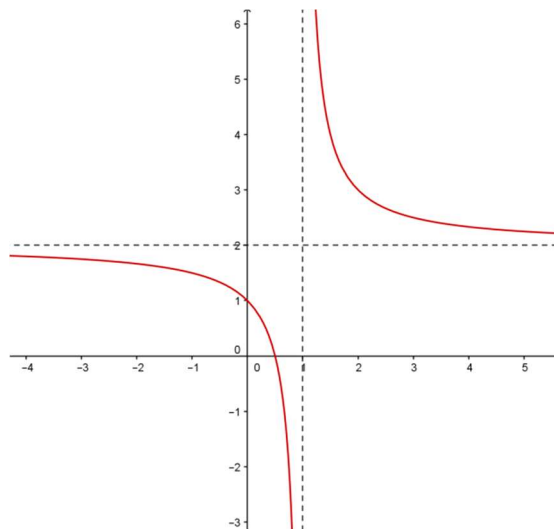


La función tiene un máximo relativo en  $x = 0$  y un mínimo relativo en  $x = 2$

Los máximos y mínimos relativos se llaman **extremos relativos**.

## Asíntotas

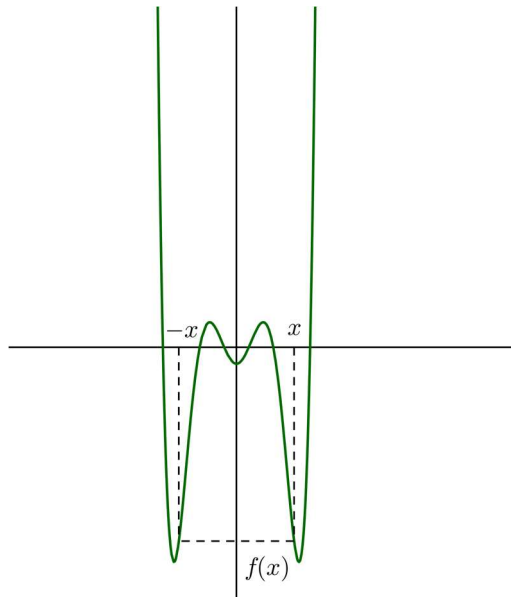
Una recta es una **asíntota** de una función  $f(x)$  si su gráfica se aproxima indefinidamente a la recta sin llegar a cortarla.



La recta  $x = 1$  es una asíntota vertical y la recta  $y = 2$  es una asíntota horizontal de la función

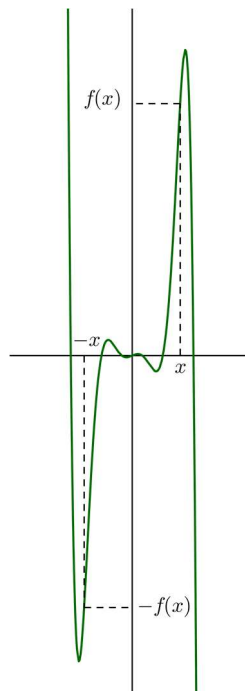
## Simetrías

Una función es **par** si  $f(-x) = f(x)$



La gráfica es simétrica respecto al eje "x"

Una función es **impar** si  $f(-x) = -f(x)$



La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Las funciones pueden no tener simetrías, es decir, hay funciones que no son ni pares ni impares.

## Ejemplos

- 1)  $f(x) = x^4 + 2x^2$  es par porque  $f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 = x^4 + 2x^2 = f(x)$
- 2)  $f(x) = x^3 + x$  es impar porque  $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -f(x)$