UNIDAD 4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

Expresiones algebraicas

Una **expresión algebraica** es una expresión matemática en la que aparecen números y letras, separados por símbolos que se corresponden con los de las mismas operaciones del cálculo numérico.

Ejemplos

El volumen de un cono $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Densidad de una substancia $d = \frac{m}{V}$

La traducción al lenguaje algebraico del enunciado "La diferencia del doble de un número y la tercera parte de otro": $2x - \frac{y}{3}$

La soluciones de las ecuaciones de segundo grado $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejercicios

1) Encuentra el valor numérico de la expresión algebraica $ab^2 + ab - 2a^2b - 2ab$ si $a = -1$ y $b = \sqrt{2}$.

Substituimos la fórmula por estos números:

$$(-1).\left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1) \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot (-1)^2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{2} = -2 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} =$$

$$= -2 - \sqrt{2}$$

2) Calcula el volumen de un cilindro de área lateral $24\pi\ cm^2$ y altura $4\ cm$

Las fórmulas del área lateral y del volumen de un cilindro son:

$$Area\ lateral = 2\pi rh$$

$$Volumen = \pi r^2 h$$

Por lo tanto, $24\pi = 2\pi r 4$

$$24\pi = 8\pi r$$

$$\frac{24\pi}{8\pi} = r$$

$$3 = r$$

El radio es $r = 3\ cm$

El volumen es $\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi\ cm^3$

Monomios

Llamamos **monomios** a las expresiones algebraicas del tipo ax^n, donde x se llama **indeterminada**, a es un número diferente de cero llamado **coeficiente** y n es un número entero no negativo que indica el **grado** del monomio.

Ejemplos

$3x^5$	indeterminada: x	coeficiente: 3	grado: 5
$\frac{2}{3}y$	indeterminada: y	coeficiente: $\frac{2}{3}$	grado: 1
$\sqrt{3}x^2$	indeterminada: x	coeficiente: $\sqrt{3}$	grado: 2

Suma y resta de monomios semejantes

Sumamos o restamos los coeficientes

$$5x^3 - 3x^3 = 2x^3$$

$$2x^6 + \frac{4}{3}x^6 = \frac{10}{3}x^6$$

$$-4y^2 - 3y^2 = -7y^2$$

Producto y cociente de monomios

Para multiplicar monomios multiplicamos los coeficientes y sumamos los grados

$$3x^2 \cdot 2x^3 = 6x^5$$

$$2x^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^4\right) = -\frac{3}{2}x^7$$

Para dividir monomios dividimos los coeficientes y restamos los grados

$$6z^6 : 2z^2 = 3z^4$$

$$5q : 15q = \frac{5q}{15q} = \frac{1}{3}$$

Potencia de un monomio y un exponente natural

Para hacer la potencia de un monomio hacemos la potencia del coeficiente y multiplicamos el grado por el exponente.

$$(3x^2)^3 = (3x^2) \cdot (3x^2) \cdot (3x^2) = 3^3(x^2)^3 = 27x^6$$

$$(-5x^3)^4 = (-5)^4 \cdot (x^3)^4 = 625x^{12}$$

$$\left(\frac{2}{3}x^2\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 (x^2)^3 = \frac{8}{27}x^6$$

Polinomios

Los **polinomios** son expresiones algebraicas en las que aparecen sumas de monomios no semejantes con la misma indeterminada.

$$P(x) = -4x^5 + 2x^4 - 3x + 4$$

$$Q(z) = 3z^3 - \frac{5}{4}$$

Los polinomios se indican con una letra mayúscula y por la letra correspondiente a la indeterminada escrita entre paréntesis.

En general, un polinomio de grado n y indeterminada x es una expresión algebraica del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en la que n es un número entero no negativo, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales llamados coeficientes y a_0 es el término independiente.

Cada uno de los monomios sumados de un polinomio es un **término** del polinomio. Un polinomio con dos términos se llama **binomio.**

$P(x) = -4x^5 + 2x^4 - 3x + 4$ es un polinomio con 4 términos y grado 5.

$Q(z) = 3z^3 - \frac{5}{4}$ es un binomio.

Un polinomio es **incompleto** cuando le falta algún término correspondiente a un grado. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = \frac{2}{3}x^4 - 4x^3 + 5x$ es incompleto porque le falta el término de grado 2 y el término independiente.

El polinomio $Q(x) = 5x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 5x + 3$ es **completo y ordenado de forma decreciente** porque tiene todos términos ordenados desde el grado mayor hasta el de grado 0.

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$ en $x = a$ se obtiene substituyendo x por a, y lo representamos por $P(a)$.

Por ejemplo, el valor numérico de $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3$ en $x = 2$ es

$$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 3 = 3 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 3 = 24 - 20 + 3 = 7$$

Operaciones con polinomios

Considero los polinomios $A(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 2$ y $B(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$

Suma

Sumamos los monomios semejantes

$$A(x) + B(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 2 + 3x^3 - 2x^2 + 1 = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1$$

O bien,

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & & -3x^2 & +x & -2 \\
+ & & 3x^3 & -2x^2 & & 1 \\
\cline{2-6}
 & 2x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +x & -1
\end{array}$$

Resta

Para calcular $A(x) - B(x)$ tenemos que sumar al polinomio $A(x)$ el **opuesto** de $B(x)$, que se obtiene cambiando el signo de todos los coeficientes de $B(x)$.

$$A(x) - B(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 2 - (3x^3 - 2x^2 + 1) =$$

$$= 2x^4 - 3x^2 + x - 2 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x - 3$$

O bien,

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & & -3x^2 & +x & -2 \\
+ & & -3x^3 & +2x^2 & & -1 \\
\cline{2-6}
 & 2x^4 & -3x^3 & -x^2 & +x & -3
\end{array}$$

Producto

Para calcular $A(x) \cdot B(x)$ multiplicamos cada término de $A(x)$ por todos los términos de $B(x)$ y, después, sumamos los términos semejantes.

$$A(x).B(x) = (2x^4 - 3x^2 + x - 2) \cdot (3x^3 - 2x^2 + 1) =$$

$$= 6x^7 - 4x^6 + 2x^4 - 9x^5 + 6x^4 - 3x^2 + 3x^4 - 2x^3 + x - 6x^3 + 4x^2 - 2 =$$

$$= 6x^7 - 4x^6 - 9x^5 + 11x^4 - 8x^3 + x^2 + x - 2$$

O bien,

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 2x^4 & & -3x^2 & +x & -2 \\
 & & & & 3x^3 & -2x^2 & & +1 \\
\hline
 & & & 2x^4 & & -3x^2 & +x & -2 \\
 & -4x^6 & & +6x^4 & -2x^3 & +4x^2 & & \\
6x^7 & & -9x^5 & +3x^4 & -6x^3 & & & \\
\hline
6x^7 & -4x^6 & -9x^5 & +11x^4 & -8x^3 & +x^2 & +x & -2
\end{array}$$

División de polinomios

Realizar la división $D(x) : d(x)$ significa encontrar un cociente $Q(x)$ y un resto $R(x)$ que cumplan:

$$D(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{y} \quad grad\big(R(x)\big) < grad(d(x))$$

Ejemplo

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +2x^4 & & -3x^2 & +4x & -2 & x^2-2x \\ \cline{7-7}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & & & & & x^3+4x^2+8x+13 \\
 & 4x^4 & & & & & \\
 & \underline{-4x^4} & \underline{+8x^3} & & & & \\
 & & 8x^3 & -3x^2 & & & \\
 & & \underline{-8x^3} & \underline{+16x^2} & & & \\
 & & & 13x^2 & +4x & & \\
 & & & \underline{-13x^2} & \underline{+26x} & & \\
 & & & & 30x & -2 &
\end{array}
$$

El cociente es $x^3 + 4x^2 + 8x + 13$ y el resto es $30x - 2$

Comprobación:

$(x^2 - 2x)(x^3 + 4x^2 + 8x + 13) + 30x - 2 =$

$= x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 26x + 30x - 2 =$

$= x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 4x - 2$

Algoritmo de Ruffini

Es un procedimiento que se utiliza para dividir un polinomio $P(x)$ por $x - a$

Ejemplo

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 2x^4 \qquad\qquad - 3x^2 + 4x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5 + 2x^4} & x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 13x + 30 \\
\qquad 4x^4 & \\
\quad \underline{-4x^4 + 8x^3} & \\
\qquad\qquad 8x^3 - 3x^2 & \\
\qquad\quad \underline{-8x^3 + 16x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad 13x^2 + 4x & \\
\qquad\qquad \underline{-13x^2 + 26x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 30x - 2 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-30x + 60} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 58 &
\end{array}
$$

El cociente es $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 13x + 30$ y el esto es 58

Podemos hacer la división más rápidamente utilizando el algoritmo de Ruffini:

	1	2	0	-3	4	-2
2		2	8	16	26	60
	1	4	8	13	30	58

El último número es el resto y los otros números son los coeficientes del cociente.

Teorema del resto

El resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $x - a$ es el valor numérico $P(a)$

Demostración

Supongamos que $Q(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el resto de la división $P(x):(x-a)$

Entonces $\quad grad\big(R(x)\big) < grad(x-a) = 1 \Longrightarrow grad\big(R(x)\big) = 0 \Longrightarrow R(x) = r \in \mathbb{R}$

Por otra parte $\quad P(x) = (x-a)\cdot Q(x) + r$

Substituimos x por a $\quad P(a) = (a-a)\cdot Q(a) + r = 0\cdot Q(a) + r = r$

Ejemplo

Considero el polinomio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 2x + 3$ y el número -1

El valor numérico de $P(x)$ en $x = -1$ es:

$$P(-1) = (-1)^5 - 3\cdot(-1)^4 + 2\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 3 = -1 - 3 + 2 + 2 + 3 = 3$$

Dividimos el polinomio $P(x)$ por $\big(x-(-1)\big) = x + 1$

	1	-3	0	2	-2	3
-1		-1	4	-4	2	0
	1	-4	4	-2	0	3

Observamos que el resto de la división 3 coincide con el valor numérico.

Definición

Diremos que un número a es una raíz del polinomio $P(x)$ si el valor numérico $P(a) = 0$

Teorema

Si a es una raíz del polinomio $P(x)$ entonces $P(x)$ es divisible por $x - a$

Demostración

Aplicando el teorema del resto sabemos que el resto de la división $P(x): x - a$ es $P(a) = 0$

Por lo tanto, $P(x) = (x-a)\cdot Q(x)$

Ejemplo

Una raíz de $P(x) = x^3 - 3x - 2$ es 2 porque $P(2) = 2^3 - 3\cdot 2 - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$

Hacemos la división $P(x): x - 2$ por Ruffini, tenemos:

	1	0	-3	-2
2		2	4	2
	1	2	1	0

Por lo tanto, $P(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 1)$

Factorización de polinomios

Teorema

Las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente.

Ejemplos

1) Encontrar las raíces y descomponer en factores el polinomio:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$$

Las posibles raíces enteras son los divisores de 2: $\pm 1 \; y \; \pm 2$

Probaremos si alguno de estos números es raíz del polinomio $P(x)$ haciendo la división por Ruffini.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = \\ &= (x-1)(x^3 - 3x - 2) = \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 - x - 2) = \\ &= (x-1)(x+1)(x+1)(x-2) = \\ &= (x-1)(x+1)^2(x-2) \end{aligned}$$

	1	-1	-3	1	2
1		1	0	-3	-2
	1	0	-3	-2	0
-1		-1	1	2	
	1	-1	-2	0	
-1		-1	2		
	1	-2	0		
2		2			
	1	0			

Diremos que 1 y 2 son raíces simples y que -1 es una raíz de multiplicidad 2 o raíz doble

2) Encontrar las raíces y descomponer en factores el polinomio:

$$A(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4$$

Observamos que no tiene término independiente, podemos extraer factor común x^4

$$A(x) = x^4(x^2 - 6x + 9) = x^4(x-3)^2$$

Se puede utilizar Ruffini, o bien, aplicar que es el cuadrado de una resta.

Tiene dos raíces: 0 de multiplicidad 4 y 3 de multiplicidad 2

	1	-6	9
3		3	-9
	1	-3	0
3		3	
	1	0	